Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2024-2025
DM 2

Devoir maison 2.
à rendre le 4 novembre

Exercice 1.
L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui vérifient les deux propriétés (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \ : \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+ ,\ f(xy) = f(x)f(y) \qquad \text{(on dit que } f \text{ est multiplicative)}$$
$$(P_2) \ : \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+ ,\ f(x+y) \geqslant f(x) + f(y) \qquad \text{(on dit que } f \text{ est sur-additive)}$$

Partie I - Un exemple

Soit $\alpha \geqslant 1$ un réel. On note f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$ (avec la convention $0^\alpha = 0$).

1. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$.
2. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.
   Indication : $x + y = x(1 + \frac{y}{x})$
3. En déduire que la fonction f_α est solution du problème posé.

Partie II - Quelques propriétés

1. Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème étudié ?

Désormais, f désigne une fonction non constante solution du problème.

2. Montrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = f(x)^n$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \neq 0$, et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
6. En déduire que f est strictement croissante.

Partie III - Détermination des solutions

A nouveau, f désigne une fonction non constante solution du problème étudié.

1. Justifier que le nombre $\ln(f(2))$ est bien défini, et que $\ln(f(2)) \geqslant \ln(2)$.
2. Justifier que pour tout réel $x > 0$, il existe un unique entier $q \in \mathbb{Z}$ tel que $2^q \leqslant x < 2^{q+1}$.
3. Soit $x > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on convient de noter q_p l'unique entier tel que $2^{q_p} \leqslant x^p < 2^{q_p+1}$.
   (a) Montrer : $\frac{q_p}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
   (b) Justifier l'encadrement $f(2)^{q_p} \leqslant f(x)^p < f(2)^{q_p+1}$, et en déduire : $\frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} < \frac{q_p+1}{p}$.
   (c) Déduire des questions précédentes qu'on a $f(x) = x^\alpha$ pour une constante $\alpha \geqslant 1$ (indépendante de x) que l'on précisera.
4. Conclure le problème.