Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2023-2024
Feuille 5

TD 5: Fonctions usuelles.

classique — demande réflexion

1 Manipulation des équivalents et DLs

Exercice 1.
Donner un équivalent de $\ln(\operatorname{sh}(x))$ en $+\infty$ où $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Exercice 2.
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$.

Exercice 3.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^{2x}}{\sin\sqrt{x} - \ln(1+2\sqrt{x})}$

Exercice 4.
Déterminer un équivalent en 0 de $\dfrac{\ln(1+x^2)+\sin(x)-\tan(x)}{e^x - \cos(x)}$.

Exercice 5.
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 6.
Déterminer un DL1 en 2 de $\ln(x)$.

Exercice 7.
Donner un DL1 en 0 des fonctions suivantes sans calculer leur dérivée:

$$x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)} \text{ et } x \mapsto e^{e^x}$$

2 Étude de fonctions puissances

Exercice 8.
Étudier la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$.

Exercice 9.
Étudier la fonction $g : x \mapsto \sqrt[4]{x^4 - x^3}$.

3 Théorème de croissances comparées et calcul de limites

Exercice 10.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

Exercice 11.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$

Exercice 12.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$.

Exercice 13.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2^x}{x^3}\right)$

Exercice 14.
Déterminer un équivalent de $\ln\left(\cos\left(\dfrac{\ln(x+3)}{e^x + x^2}\right)\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 15.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}$.

4 Résolution d'équations

Exercice 16.
Résoudre $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 17.
Résoudre $e^x + e^{1-x} = e+1$.

Exercice 18.
Résoudre sur $]0,+\infty[$, $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5 Manipulation des fonctions trigonométriques

Exercice 19.
Simplifier, pour $x \in \mathbb{R}$, les expressions suivantes :

1. $\cos\arctan x$
2. $\arccos\cos(x)$
3. $\arcsin\sin(x)$

Exercice 20.
Simplifier $\arctan\tan x$ pour x non congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

Exercice 21.
Établir la formule suivante en précisant pour quelles valeurs de x elle est vérifiée:
$\arcsin(\sqrt{x}) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \arcsin(\sqrt{1-x})$.

Exercice 22.
Simplifier $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3})$.

6 Résolution d'équations trigonométriques

Exercice 23.
Résoudre $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{2x}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 24.
Résoudre $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.

Exercice 25.
Résoudre $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan x$.

Exercice 26.
Résoudre $\arcsin(\tan x) = x$.

7 Étude de fonctions circulaires

Exercice 27.
Étudier et représenter graphiquement la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right).$$

Exercice 28.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $1 - x \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant 1 - x + x^2$.
2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $1 - x^2 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1 - x^2 + x^4$ puis que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \arctan(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$.
3. En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - x}{x^3}$.
4. Enfin, montrer que $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Exercice 29.
Déterminer un équivalent de $\tan\left(\dfrac{x^2e^x - \ln(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \cos x}\right)$.

8 Manipulation des fonctions hyperboliques

Exercice 30.
Simplifier $\mathrm{ch}(\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ en déterminant pour quelles valeurs de x elle est définie.

Exercice 31.
Résoudre $\mathrm{ch}(x) = 2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 32.
Résoudre $3\mathrm{ch}(x) + 2\mathrm{sh}(x) = 3$

Exercice 33.
Démontrer que $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$ en précisant avant les valeurs de x pour lesquelles ces expressions sont définies.

Exercice 34.
Étudier la fonction tanh : $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Cette fonction est appelée tangente hyperbolique.

9 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 35.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)}$

Exercice 36.
Déterminer un équivalent en 1^- de $\dfrac{1-x^2}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 37.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{e^x - \cos(x)}$

Exercice 38.
Donner un DL2 en 0 des fonctions suivantes sans calculer leur dérivée:

$$x \mapsto \left(e^{\sin x} - 1\right)^2 \text{ et } x \mapsto \ln\left(1 + \tan(\sin^2(x))\right)$$

Exercice 39.
Étudier la fonction $f : x \mapsto (x+1)^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 40.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$.

Exercice 41.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$.

Exercice 42.

Calculer $\lim\limits_{x\to 0+} x^3 \ln x$.

Exercice 43.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^2}$.

Exercice 44.
Résoudre $\arcsin(x) = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$.

Exercice 45.
Simplifier $\tan\arcsin x$, $x \in]-1, 1[$.

Exercice 46.
Résoudre $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x$.

Exercice 47.
Résoudre $\arcsin(1) = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin x$.

Exercice 48.
Pour quelle(s) valeur(s) de x l'équation suivante est-elle vérifiée:

$$2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 49.
Soit $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$. Déterminer son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et sa dérivée.

Exercice 50.
Soit $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

1. Déterminer son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et sa dérivée.
2. En déduire une expression simplifiée de f.
3. Retrouver ce résultat à l'aide de formules trigonométriques.

Exercice 51.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\cos(x)-1)}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

Exercice 52.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+\sin^2(x))}$.

Exercice 53.
Résoudre $2\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) = 3$.

Exercice 54.
Soit $g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}(x) - 1. \end{array} \right.$

1. Résoudre $g(x) = 0$.
2. Étudier les variations de g.
3. En déduire une valeur de x telle que $g(x) \leqslant 0$.

Exercice 55.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $e^{\mathrm{sh}(x)} > 1 + x$.

10 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 56.
Déterminer un équivalent en 0 de $\ln\big(1 + \sin(\sqrt{1+2x} - 1)\big)$.

Exercice 57. ⚙
Déterminer la limite en 0 de $\frac{1-x^2}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 58. ⚙
Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{(3x-\pi)\cos x}$.

Exercice 59. ⚙
Montrer que $\int_x^{x+1} e^t \ln(t)\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} e^x(e-1)\ln(x)$

Exercice 60. ⚙
Simplifier $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.

Exercice 61. ⚙

1. Montrer, en utilisant des formules trigonométriques, que
$$\forall x \in]-1,1[, 2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$
2. Retrouvez ce résultat en faisant une étude de fonction.
3. Quel résultat a-t-on si $x \notin [-1,1]$?

Exercice 62. ⚙
Tracer la fonction $x \mapsto \arcsin\sin x + \arccos\cos x$.

Exercice 63.
Résoudre $\mathrm{ch}(x) = a$.

Exercice 64.
Résoudre $\mathrm{sh}(x) = a$, pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 65. ⚙
Résoudre $\mathrm{sh}(x) = a\mathrm{ch}(x)$, pour $a \in \mathbb{R}$.

Memo

1. Comment déterminer le domaine de définition/dérivabilité?
   Utiliser son cours (ce qui implique de le connaître sur le bout des doigts).

2. Comment étudier la réciproque d'une fonction bijective? Utiliser le cours et les résultats sur la monotonie, la continuité, la dérivabilité ou les limites de la réciproque d'une fonction.

3. Comment résoudre une équation avec des fonctions circulaires réciproques?
   Appliquer une fonction circulaire en prenant garde aux intervalles sur lesquels on travaille pour raisonner par équivalence (ou pour être conscient qu'on ne travaille pas par équivalence et qu'il faut donc ensuite vérifier que les valeurs obtenues sont effectivement solution du problème initial).

4. Comment résoudre une équation avec des fonctions hyperboliques?
   Poser $X = \mathrm{e}^x$