Lycée du Parc
PCSI 842
Feuille 6

Année 2024-2025

TD 6: Nombres complexes.

classique   demande réflexion

1 Manipulation de nombres complexes

Exercice 1.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z-1| = |z+1|$ en utilisant la conjugaison.

Exercice 2.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z) \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$ en utilisant la conjugaison.

Exercice 3.
Pour tout $z \neq 1$, on pose $h(z) = \dfrac{i(z+1)}{1-z}$.

1. Montrer que (z est de module 1 et $z \neq 1$) $\Leftrightarrow$ ($h(z)$ est réel).
2. Montrer que $|z| < 1 \Leftrightarrow \mathcal{I}m(h(z)) > 0$.

Exercice 4.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre $\left(\dfrac{z+2i}{z-i}\right)^n = 1$.

Exercice 5.
Soient z, z' deux complexes. Montrer que

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

Exercice 6.
Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
3. Montrer que $f|^{\mathbb{U}}$ est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Exercice 7.
Soient p, q deux réels.

1. Factoriser $e^{ip} + e^{iq}$.
2. Retrouver les formules pour factoriser $\cos p + \cos q$ et $\sin p + \sin q$.

Exercice 8.
Montrer que $u \in \mathbb{C}, |u| = 1 \Rightarrow \exists z \in \mathbb{C}^*, u = \dfrac{\overline{z}}{z}$.

2 Résolution d'équations

Exercice 9.

Calculer les racines carrées des nombres suivants:

- $z_1 = -2$
- $z_2 = i$
- $z_3 = 1+i$
- $z_4 = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$
- $z_5 = 3+4i$
- $z_6 = -3+4i$

Exercice 10.

Résoudre $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11.

Résoudre $z^5 = 1-i$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 12.

Résoudre $z^5 = -2+2i$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 13.

Résoudre $z^5 = \overline{z}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 14.

Résoudre $z^2 + z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 15.

Résoudre $4z^2 - 2z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 16.
Résoudre $z^4 + 8z^2 + 160 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 17.
Résoudre $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 18.
Résoudre $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 19.
Résoudre $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 20.
Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ et $u = z + z^2 + z^4$, $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u + v$ et u^2.
2. En déduire la valeur de $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$.

Exercice 21.
Montrer que
$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

3 Géométrie

Exercice 22.
Déterminer l'ensemble des z tel que $\dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R}$.

Exercice 23.
Déterminer l'ensemble des z tel que $\dfrac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$.

Exercice 24.
Déterminer l'ensemble des z tels que $|(1+i)z - 2i| = 2$.

Exercice 25.
Déterminer l'ensemble des z tels que $|2iz - 1 + i| = 1$.

Exercice 26.
Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 27.
On considère l'équation $\left(\dfrac{2z+1}{z+1}\right)^4 = 1$.

1. Donner les solutions de l'équation.
2. Placer les images des solutions sur un dessin.
3. Montrer que les images des solutions appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 28.
Soient a, b réels distincts, $n \in \mathbb{N}^\star$, résoudre $(z-a)^n = (z-b)^n$. Montrer que les solutions sont les affixes de points appartenant à une même droite verticale.

4 Trigonométrie

Exercice 29.

Résoudre $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$.

Exercice 30.

Résoudre $\cos(2x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 31.

Résoudre $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$.

Exercice 32.

Résoudre $4\sin(x)\cos(x) = 1$.

Exercice 33.

Résoudre $\cos^2(x) + 3\cos(2x) = 4$.

Exercice 34.

Résoudre $\cos(2x) - 2\sin^2(x) = 0$.

Exercice 35.

Résoudre $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Exercice 36.

Résoudre $0 \leqslant \sin(x)$.

Exercice 37.

Résoudre $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 38.

Résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 39.

Résoudre $|\cos(3x-1)| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 40.

Résoudre $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos(x)$.

Exercice 41.

Résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 0$.

Exercice 42.
Résoudre $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 43.
Résoudre $\cos^2(x) - 2\sin x\cos x - \sin^2(x) = 0$.

Exercice 44.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Exercice 45.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$.

Exercice 46. ⚙
Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ avec $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} [\pi]$.

Memo

- Comment déterminer la partie réelle/imaginaire ?
  - Utiliser la forme exponentielle
  - Se ramener à une forme algébrique ($a + ib$)
  - Utiliser la factorisation par l'arc moitié
- Comment déterminer le module et l'argument ? Se ramener à la forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ en faisant bien attention au signe de ρ.
- Comment transformer une expression trigonométrique? Cela dépend évidemment de l'expression (de la forme $e^{ip} + e^{iq}$, polynôme en cos ou sin, cos ou sin d'un angle multiple etc).
  - Utiliser la factorisation par l'arc moitié (permet de factoriser toute expression de la forme $e^{ip} \pm e^{iq}$, y compris le cas particulier $e^{ip} = 1$).
  - Utiliser la formule d'Euler pour transformer une puissance en un angle multiple
  - Utiliser la formule de Moivre pour exprimer un cosinus ou sinus d'un angle multiple comme un polynôme en cos ou sin.
  - Utiliser les formules trigonométriques: à partir de $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$, on retrouve facilement la formule pour transformer une somme du type $\cos p + \cos q$ en un produit.
- Comment déterminer une racine carrée?
  - Observer s'il n'y a pas de racine connue (évidente)
  - Utiliser la forme exponentielle
  - En dernier recours, poser $z = x + iy$ et résoudre un système
- Comment résoudre une équation complexe?
  - Appliquer la formule du cours dans le cas d'une équation du type polynôme du second degré, $Z^n = A$ ou $e^z = a$.
  - Se ramener à une équation qu'on sait résoudre (ie, du type ci-dessus) par un changement de variable.