Correction du DM n 1

Exercice 1 1. (a) En évaluant la relation $(*)$ en $n=0$, on obtient :

$$f(0)+f(f(0))=0$$

Or, les quantités $f(0)$ et $f(f(0))$ sont positives, puisque f est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donc, puisque leur somme est nulle, elles sont toutes les deux nulles. D'où en particulier : $\boxed{f(0)=0}$

(b) Notons (1) la relation $f(p)=f(q)$. On applique f pour obtenir : $f(f(p))=f(f(q))$, relation que l'on note (2). On fait alors la somme (1) + (2) pour obtenir :

$$f(p)+f(f(p))=f(q)+f(f(q))$$

c'est-à-dire $2p=2q$, d'après $(*)$. Cela implique alors que $p=q$.
Attention! $f(p)=f(q)$ n'est équivalent à $f\circ f(p)=f\circ f(q)$ que si f est injective (ce qui est précisément ce que vous êtes en train de montrer !)

(c) Soit $i\geqslant n+1$. Pour montrer que $f(i)\geqslant n+1$, raisonnons par l'absurde. Supposons que $f(i)\leqslant n$ (mettons $f(i)=k\in[\![0,n]\!]$). Alors, comme $f(k)=k$, par hypothèse, on a $f(i)=f(k)$. D'après la question précédente, cela implique que $i=k$. **Contradiction**, car $i\geqslant n+1$, donc $i>k$.
Conclusion : $\boxed{f(i)\geqslant n+1}$.

Montrons maintenant que $f(n+1)=n+1$. On a d'après $(*)$:

$$f(n+1)+f(f(n+1))=2(n+1)=(n+1)+(n+1) \qquad (3)$$

Or, en appliquant le dernier résultat encadré à $i=n+1$, on obtient

$$f(n+1)\geqslant n+1$$

puis en l'appliquant à $i=f(n+1)$, on obtient

$$f(f(n+1))\geqslant f(n+1)\geqslant n+1$$

Si on suppose, par l'absurde, que $f(n+1)\neq n+1$, on a $f(n+1)>n+1$ ce qui implique

$$f(n+1)+f\circ f(n+1)>2(n+1),$$

et l'égalité (3) serait impossible.
Conclusion : $f(n+1)=n+1$.

C'est un peu étrange de parler de récurrence forte dans cette question car la récurrence forte c'est plutôt l'objet de toute la question 1.

2. On procède par analyse-synthèse, et le travail de la question **??** conclut l'étape d'**analyse**. En effet, il montre que si une fonction f vérifie $(*)$, alors par récurrence forte, la proposition suivante : "$f(n)=n$" est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ (la question **??** assure l'initialisation et la

question **??** montre l'hérédité). Autrement dit, la fonction f est la fonction identité sur $\mathbb{N}$.

Synthèse : réciproquement, la fonction identité vérifie bien $(*)$. En effet, si $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) + f(f(n)) = n + f(n) = n + n = 2n$$

Conclusion : la propriété $(*)$ est vérifiée par une unique fonction : la fonction identité.

Beaucoup me parle de la fonction $f(n) = n$ ce qui ne veut rien dire !

Exercice 2 1. *Montrer que f est bijective et calculer $f^{-1}(0)$.*

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 3$ donc f est strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ donc, par continuité de f, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. On en déduit que f est bijective. On remarque que $f(-1) = 0$ donc $f^{-1}(0) = -1$.

Inutile d'invoquer la continuité pour montrer l'injectivité donc ne le mentionnez pas, ça nous fait nous demander si vous pensez qu'il est nécessaire que f soit continue.

Inutile aussi de montrer que -1 est la seule racine: c'est une solution évidente de l'équation $f(x) = 0$ et, f étant bijective, vous savez que cette équation admet une unique solution

2. (a) *Montrer que f^{-1} est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1}.*
La fonction f est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas donc f^{-1} est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{3\left(f^{-1}(x)\right)^2 + 3}.$$

(b) *Calculer $(f^{-1})'(0)$.*

On a

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3\left(f^{-1}(0)\right)^2 + 3} = \frac{1}{6}.$$

3. (a) *Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f^{-1}.*
La fonction $3(f^{-1})^2 + 3$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. La fonction $(f^{-1})'$ est l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(f^{-1}\right)"(x) = -\frac{6f^{-1}(x) \times (f^{-1})'(x)}{(3(f^{-1}(x))^2 + 3)^2} = -\frac{6f^{-1}(x)}{(3(f^{-1}(x))^2 + 3)^3} = -\frac{2f^{-1}(x)}{9((f^{-1}(x))^2 + 1)^3}$$

N'oubliez pas de simplifier au maximum

(b) *Calculer $(f^{-1})"(0)$.*
On a

$$(f^{-1})"(0) = -\frac{2f^{-1}(0)}{9((f^{-1}(0))^2 + 1)^3} = \frac{1}{36}.$$