Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 3

Devoir d'entrainement 3.

Exercice 1.
On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad f(z) = \frac{z-1}{z+1}$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A Lieux de points

1. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$

Partie B Étude d'une suite récurrente

1. (a) Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution que l'on exprimera en fonction de ω.
   (b) La fonction f est-elle injective? Surjective?
   (c) Montrer que pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$.

   On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2. (a) Résoudre l'équation $f(z) = z$.
   (b) Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?
   (c) Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.
3. On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -i, i\}$ et on introduit la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}$$

   D'après la question précédente, la suite (v_n) et bien définie puisque $u_0 \neq -i$ et donc pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq -i$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-i$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période 4.

Exercice 2.

1. (a) Montrer que ch induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle que l'on précisera. On note argch la bijection réciproque de cette bijection induite.
On ne cherchera pas à déterminer une expression de argch.
   (b) Étudier la dérivabilité de argch et donner une expression de sa dérivée.

2. (a) Justifier que sh est bijective. On notera argsh sa bijection réciproque.
On ne cherchera pas à déterminer une expression de argch.
   (b) Montrer que argsh est dérivable et donner une expression de sa dérivée.

Pour tout réel a, on note $f_a : \left\{ \begin{array}{lcc} D_a & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x+\sqrt{x^2+a} \end{array} \right.$).

3. (a) Donner le domaine de définition D_a de f_a. On distinguera $a > 0$, $a = 0$ et $a < 0$.
   (b) Donner un équivalent de $f_a(x)$ en $+\infty$.
   (c) Calculer la dérivée de f_a et simplifier son expression.
   (d) Dresser le tableau de variations de f_a selon la valeur de a.
   (e) En déduire que pour tout $a \geqslant 0$, f_a est bijective.
   (f) Soit $a \geqslant 0$. Montrer qu'il existe α, β deux réels dépendant uniquement de a tels que
$$\forall x \in D_a, f_a^{-1}(x) = \alpha \mathrm{ch}(x) + \beta \mathrm{sh}(x).$$
   (g) a-t-on un résultat similaire pour $a < 0$?

4. Montrer que $\mathrm{argch}' = f_b'$ pour réel b à préciser. En déduire une expression de argch.

5. Montrer que $\mathrm{argsh}' = f_c'$ pour réel c à préciser. En déduire une expression de argsh.

Exercice 3.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \arcsin(3x) - \arccos(2x)$

1. (a) Soit $x \in [-1, 1]$, simplifier $\sin \arccos(x)$ et $\cos(\arcsin(x))$ en justifiant rigoureusement.
   (b) Donner, sans démonstration, la relation entre arccos et arcsin.

2. Déterminer l'intervalle de définition I de f.

3. Dresser le tableau de variations de f.
On exprimera les valeurs aux bornes uniquement à l'aide de arcsin.

4. Montrer que f induit une bijection notée g entre deux intervalles que l'on précisera.

5. Pour tout $x \in I$, calculer et simplifier $\sin(f(x))$.

6. Montrer que si $f(x) = t$ alors $x = \pm \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{13 - 12\sin(t)}}$

7. En déduire une expression de g^{-1}.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère l'équation (E_n) : $nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^\star$.

1. Donner un argument théorique permettant d'affirmer que l'on peut factoriser $nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ par $(z-1)$.

2. Vérifier que $nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3. En déduire si (E_n) admet une solution réelle positive différente de 1.

4. On suppose que (E_n) admet une solution z vérifiant $|z| > 1$

   (a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{C}^\star$ tel que $|u| > 1$, on a $\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u}\right)^k\right| < n$.

   (b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z^k} = n$. Conclure.

5. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. On suppose que $z = e^{i\theta}$ est solution de (E_n).

   (a) En calculant $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$, montrer que $e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{n\sin\frac{\theta}{2}}$.

   (b) En déduire que $e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}}$ vaut nécessairement 1 ou -1.

   (c) Montrer que $z^{n+1} = 1$.

   (d) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$ et relever une contradiction.

6. Que peut-on conclure des questions précédentes à propos des solutions de (E_n)?

7. Soit z une solution de (E_n) différente de 1. On a donc $|z| < 1$. On souhaite montrer que les solutions de (E_n) se rapprochent du cercle unité quand n tend vers $+\infty$. À cette fin, on pose $m_n = \min\{|z|, z \text{ solution de } E_n\}$ et on souhaite montrer que $m_n \to 1$.

   (a) Montrer que $1 = (1 + n(1-z))\, z^n$.

   (b) En déduire que $(2n+1)\,|z|^n \geqslant 1$.

   (c) Montrer que $m_n \geqslant \frac{1}{(2n+1)^{1/n}}$.

   (d) Conclure.

Correction du DS d'entrainement n 3

Exercice 1 **Partie A Lieux de points**

1. *Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.*
   Considérons les points C d'affixe $z_C = 1$ et D d'affixe $z_D = -1$ On a

$$f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-(-1)| \Leftrightarrow |z_M - z_C| = |z_M - z_D| \Leftrightarrow CM = DM$$

   donc le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$ est la médiatrice du segment $[CD]$, il s'agit de l'axe des ordonnées (droite d'équation $x = 0$).

   On vous demande un lieu géométrique, lorsque vous me répondez " les imaginaires purs", vous ne répondez donc pas à la question

2. *Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$*
   Posons $z = x + iy$. On a

$$\begin{array}{ll} & |f(z)| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{|z-1|}{|z+1|} = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & |z-1| = \sqrt{2}|z+1| \\ \Leftrightarrow & |x+iy-1|^2 = 2|x+iy+1|^2 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + y^2 = 2\left((x+1)^2 + y^2\right) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2\left(x^2 + 2x + 1 + y^2\right) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 4x + 2 + 2y^2 \\ \Leftrightarrow & 0 = x^2 + 6x + y^2 + 1 \\ \Leftrightarrow & 0 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 9 - 9 + y^2 + 1 \\ \Leftrightarrow & 0 = (x+3)^2 + y^2 - 8 \\ \Leftrightarrow & (x+3)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \end{array}$$

   Conclusion: Le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$ est le cercle de centre $\Omega(-3; 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

   Je ne vous cache pas que celle-là vous a posé problème, y compris à ceux qui ont pensé à poser $z = x + iy$.

Partie B Étude d'une suite récurrente

1. (a) *Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution que l'on exprimera en fonction de ω.*

   Montrons que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution.
   Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = 1 \Leftrightarrow z - 1 = z + 1 \Leftrightarrow 0 = 2$$

ce qui est faux quelque soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
Donc l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Soit $\omega \neq 1$. On a

$$\begin{array}{ll} & f(z) = \omega \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z-1}{z+1} = \omega \\ \Leftrightarrow & z - 1 = \omega(z+1) \\ \Leftrightarrow & z - 1 = \omega z + \omega \\ \Leftrightarrow & (1-\omega)z = 1 + \omega \\ \Leftrightarrow & z = \frac{1+\omega}{1-\omega} \text{ car } w \neq 1 \end{array}$$

Donc l'équation $f(z) = \omega$ admet pour unique solution $z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$.

(b) *La fonction f est-elle injective? Surjective?*

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'équation $f(z) = \omega$ admet aucune ou une unique solution donc f est injective.
$1 \in \mathbb{C}$ n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective.

(c) *Montrer que pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.*

f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
$f(0) = -1$ et $f(1) = 0$
donc -1 a pour antécédent 0 et 0 a pour antécédent 1. Par injectivité de f, ce sont les seuls antécédents de -1 et 0. De plus, d'après la question 1.(a), 1 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
Certains ont résolu $f(z) = 0$ et $f(z) = 1$. Dans ce cas, inutile d'invoquer l'injectivité de f.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2. (a) *Résoudre l'équation $f(z) = z$.*

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$,

$$\begin{array}{ll} & f(z) = z \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z-1}{z+1} = z \\ \Leftrightarrow & z - 1 = z(z+1) \\ \Leftrightarrow & z^2 = -1 \\ \Leftrightarrow & z = \pm i \end{array}$$

L'ensemble de solution est $\{-i; i\}$

(b) *Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?*

Si $u_0 = i$ alors $u_1 =$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = i$ et la suite est constante.

De même, si $u_0 = -i$, la suite est constante.

Certains m'ont dit " si $u_0 \in \{\pm i\}$, alors pour tout n, $u_n \in \{\pm i\}$ ce qui est vrai mais moins précis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante.

(c) *Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.*

On va montrer la contraposée, à savoir $\exists n \in \mathbb{N}, u_n = \pm i$ implique $u_0 = \pm i$.

On suppose donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \pm i$. Si $n = 0$, c'est bon. Sinon, on a $n \geqslant 1$ et $f(u_{n-1}) = \pm i$. Par injectivité de la fonction, on a donc $u_{n-1} = \pm i$. Si $n - 1 = 0$, on s'arrête. Sinon, on refait le même raisonnement. Par récurrence descendante, on obtient finalement $u_0 = \pm i$. On peut aussi raisonner par récurrence sur n: Soit $u_0 \notin \{-i, i\}$, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin \{-i, i\}$.

Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 \notin \{-i, i\}$ par hypothèse.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$,

supposons que $u_n \notin \{-i, i\}$. On a $u_n \neq i$ donc, d'après la question 2.(a), $f(u_n) \neq i$ et $u_n \neq -i$ donc, d'après la question 2.(a), $f(u_n) \neq -i$. On a donc $u_{n+1} \notin \{-i, i\}$

Conclusion

Par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin \{-i, i\}$$

Beaucoup de raisonnements confus sur cette question. Certains se sont lancés dans une récurrence mais on ne comprend pas très bien quelle propriété vous êtes en train de montrer. D'autres montrent que $u_n \in \{\pm i\} \Rightarrow u_{n-1} \in \{\pm i\}$ et s'arrêtent là. J'ai eu aussi des phrases très ambiguës du style si $u_n \notin \{\pm i\}$, alors $u_{n+1} \notin \{\pm i\}$ car $\pm i$ sont les deux seules solutions à $f(z) = z$. Et donc ? est-ce qu'on ne pourrait pas avoir $u_n = i$ et $u_{n+1} = -i$ (la réponse est non car f est injective mais ça ne saute pas aux yeux que vous aviez pensé à ce cas là quand vous l'avez écrit).
Enfin, j'ai eu des raisonnements par l'absurde où vous supposez $u_0 \in \{\pm i\}$ et là, j'ai beau réfléchir, je ne vois pas comment ça permettrait de montrer l'implication demandée.

On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -i, i\}$ et on introduit la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}$$

D'après la question précédente, la suite (v_n) et bien définie puisque $u_0 \neq -i$ et donc pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq -i$.

3. (a) *Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-i$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-i}{u_{n+1}+i} = \frac{\frac{u_n-1}{u_n+1}-i}{\frac{u_n-1}{u_n+1}+i} = \frac{u_n-1-i(u_n+1)}{u_n-1+i(u_n+1)} \\
&= \frac{u_n-1-iu_n-i}{u_n-1+iu_n+i} = \frac{(1-i)u_n-(1-i)(i)}{(1+i)u_n+(1+i)i} = \frac{1-i}{1+i}\frac{u_n-i}{u_n+i} \\
&= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}v_n \\
&= \frac{-2i}{2}v_n \\
&= (-i)v_n
\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=-i$.

(b) *Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.*

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-i)^n v_0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+4} = (-i)^{n+4}v_0 = (-i)^n(-i)^4 v_0 = (-i)^n v_0 = v_n$.
Donc la suite (v_n) est périodique de période 4

Considérons les points du plan complexe, A d'affixe v_0, D d'affixe v_1,C d'affixe v_2, et B d'affixe v_3.
Alors

$$z_B = iz_A = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}z_A,\ z_C = iz_B = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}z_B,\ z_D = iz_C = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}z_C$$

Donc A, B, C et D sont les images par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ des points D, A, B, C. Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont orthogonales et de même longueur, A, B, C et D sont les quatre sommets d'un carré.

(c) *Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période* 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, On a

$$\begin{aligned}
& v_n = \frac{u_n-i}{u_n+i} \\
\Leftrightarrow\ & v_n(u_n+i) = u_n - i \\
\Leftrightarrow\ & v_nu_n + v_n \times i = u_n - i \\
\Leftrightarrow\ & u_nv_n - u_n = -iv_n - i \\
\Leftrightarrow\ & u_n(v_n-1) = -iv_n - i
\end{aligned}$$

On remarque que $v_n \neq 1$ car $v_0 \neq 1$.
d'où
$u_n = -i\dfrac{v_n+1}{v_n-1}$

La suite (v_n) est périodique de période 4 donc la suite (u_n) est périodique de période 4.

Exercice 2 1. (a) La fonction $\mathrm{ch}|_{\mathbb{R}^+}$ est strictement croissante donc injective. Elle induit donc une bijection vers $\mathrm{ch}(\mathbb{R}+) = [1, +\infty[$.
Attention, certains oublient complètement de me parler de ce qui se passe à l'arrivée !!! D'autres me disent qu'il suffit de corestreindre à son image et ça s'est faux en général :

Prenez cette fonction

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Alors $f|_{\mathbb{R}^+}$ est strictement décroissante donc injective. Si vous corestreignez à l'image de f à savoir $]-\infty,1]$, vous n'obtenez pas une fonction bijective! Il faut corestreindre à $\mathrm{Im}(f|_{\mathbb{R}^+}) = f(\mathbb{R}^+)$ (qui vaut ici $]0,1]$). J'ai vu des $\mathrm{Im}(\mathbb{R})$ ce qui n'a aucun sens... attention à ce que vous écrivez.

(b) La dérivée de ch est sh qui s'annule en 0 et $\mathrm{ch}(0) = 1$ donc argch n'est pas dérivable en 1.

$$\forall x \in]1,+\infty[, \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh} \circ \mathrm{argch}(x)}.$$

On a $\mathrm{argch}(x) > 0$ donc $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) > 0$. On peut donc écrire

$$\mathrm{sh} \circ \mathrm{argch}(x) = \sqrt{\mathrm{sh}^2 \circ \mathrm{argch}(x)} = \sqrt{\mathrm{ch}^2 \circ \mathrm{argch}(x) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in]1,+\infty[, \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Là, ça a été un carnage. Voilà les erreurs courantes vues dans vos copies.

- argch est dérivable car ch l'est (raté, il faut regarder où/si la dérivée s'annule)
- ch^{-1}. J'ai même du mal à l'écrire tellement ça pique les yeux: ch N'est PAS bijective !!!!
- argch est définie sur .... (remplacer par tout ce qui vous passe par la tête). Là, je suis très surprise. Si vous avez défini argch comme la bijection réciproque de $\mathrm{ch}|_{\mathbb{R}^+}^{[1,+\infty[}$, vous savez que argch est définie sur $[1,+\infty[$ et a pour espace d'arrivée $\mathbb{R}^+$.
- Certains ont étudié $\mathrm{ch}(x) = a$ alors qu'on vous dit explicitement qu'on ne veut pas d'expression de argch.
- En revanche, une expression de la dérivée de argch signifie une expression à l'aide de x! Seuls 3 ou 4 d'entre vous ont pensé à simplifier la dérivée.

2. (a) sh est strictement croissante donc injective et son image vaut $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue et $\lim_{x\to\pm\infty} sh(x) = \pm\infty$. On en déduit qu'elle est bijective.

(b) La dérivée de sh est ch qui ne s'annule pas donc argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch} \circ \mathrm{argsh}(x)}.$$

Comme ch est positive, on peut écrire

$$\mathrm{ch} \circ \mathrm{argsh}(x) = \sqrt{\mathrm{ch}^2 \circ \mathrm{argsh}(x)} = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 \circ \mathrm{argsh}(x)} = \sqrt{1 + x^2}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Là encore, j'ai vu des erreurs similaires à celle de ch.

3. (a) On procède par disjonction de cas:

- **Si** $a > 0$ **alors** pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sqrt{x^2+a} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x \Longrightarrow \sqrt{x^2+a} + x > 0$$

Donc, pour $a > 0$ **,** $D_a = \mathbb{R}$ **et** f_a **est définie sur** $\mathbb{R}$

- **Si** $a < 0$ **alors** pour avoir $x^2 + a \geqslant 0$, il faut que $x \leqslant -\sqrt{|a|}$ ou $x \geqslant \sqrt{|a|}$.
Si $x \geqslant \sqrt{|a|} > 0$ alors $\sqrt{x^2+a} + x > 0$ donc $f(x)$ existe
Si $x \leqslant -\sqrt{|a|} < 0$ alors $x = -|x|$ et

$$\sqrt{x^2+a} < \sqrt{x^2} = |x| = -x \Longrightarrow \sqrt{x^2+a} + x < 0$$

donc $f(x)$ n'existe pas
Au final, pour $a < 0$ **,** $D_a = [\sqrt{|a|}, +\infty[$

- **Il reste** $a = 0$, alors $f(x) = ln(x + |x|)$ et

$$x \leqslant 0 \Longrightarrow x + |x| = 0 \Longrightarrow f(x) \quad \text{n'existe pas}$$

Au final, pour $a = 0$ **,** $D_a =]0, +\infty[$

Celle-là aussi, ça a été un massacre. Je vous rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$ (donc pas toujours x). Je me permets aussi de vous dire que $\sqrt{a + x^2} > x$ ne garantit pas $x + \sqrt{a + x^2} > 0$ (à moins de justifier que la première est vraie pour tout réel x donc aussi pour $-x$).

(b) Pour $x > 0$, on écrit

$$f_a(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) = \ln(x) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{x^2}}\right),$$

et $\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{x^2}}\right) \to \ln(2)$.

On a donc $f_a(x) = \ln(x)\left(1 + \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{x^2}}\right)}{\ln(x)}}_{\to 0}\right) \sim_{x \to +\infty} \ln(x)$.

on demandait une expression SIMPLIFIEE !!!

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in D_a$,

$$f_a'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}}{x + \sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

(d) D'après la question précédente, la fonction f_a est strictement croissante sur son domaine de définition. Pour dresser le tableau de variations, on raisonne à nouveau par disjonction de cas.

- Si $a > 0$, on a, en multipliant par la quantité conjuguée:

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+a} - x}\right) = -\infty,$$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f_a	$-\infty$	$+\infty$

En effet,

$$x + \sqrt{x^2 + a} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a} - x},$$

en multipliant par la quantité conjuguée donc $\lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2 + a} = 0$ et

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right) = -\infty$$

Visiblement, beaucoup ne savaient pas comment calculer cette limite.

- Si $a < 0$, $\lim_{x \to |a|} f_a(x) = \lim_{x \to |a|} \ln(x + \sqrt{x^2 - |a|} = \ln |a|$. On a donc

x	$\sqrt{\lvert a \rvert}$	$+\infty$
f_a	$\frac{1}{2} \ln \lvert a \rvert$	$+\infty$

- Si $a = 0$, on a

x	0	$+\infty$
f_a	$-\infty$	$+\infty$

(e) D'après les tableaux de variations, pour $a \geqslant 0$, f_a a pour image $\mathbb{R}$. Comme elle est strictement croissante, elle est bijective.

(f) Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme on sait déjà que $f_a(x) = y$ admet une unique solution, on peut raisonner par implication.

$$\begin{aligned}
& f_a(x) = y \\
\iff \quad & x + \sqrt{x^2 + a} = e^y \\
\iff \quad & \sqrt{x^2 + a} = e^y - x \\
\implies \quad & x^2 + a = (e^y - x)^2 \\
\implies \quad & x^2 + a = e^{2y} - 2xe^y + x^2 \\
\implies \quad & x = g_a(y) = \frac{e^{2y} - a}{2\,e^y} = \frac{e^y - ae^{-y}}{2}
\end{aligned}$$

Mais on a $e^y = ch(y) + sh(y)$ et $e^{-y} = ch(y) - sh(y)$ ce qui donne au final :

$$y = ch(y)\frac{1-a}{2} + sh(y)\frac{1+a}{2}$$

On en déduit que pour tout $x \in D_a$, $f_a^{-1}(x) = ch(x)\frac{1-a}{2} + sh(x)\frac{1+a}{2}$.

(g) Si $a < 0$, alors f_a induit une bijection de $[\sqrt{|a|}, +\infty[$ vers $[\frac{1}{2} \ln |a|\,, +\infty[$. Si on note g_a cette bijection induite, alors pour tout $y \in [\sqrt{|a|}, +\infty[$, $g_a(x) = y \Rightarrow f_a(x) = y \Rightarrow x =$

$ch(y)\dfrac{1-a}{2} + sh(y)\dfrac{1+a}{2}$ car on n'utilise pas le fait que a est positif dans le calcul de la question précédente. On a donc

$$\forall x \in [|a|, +\infty[, g_a^{-1}(x) = ch(x)\frac{1-a}{2} + sh(x)\frac{1+a}{2}.$$

Beaucoup m'ont dit " non, pas de situation similaire car f_a n'est pas bijective. Vous voyez bien qu'il ne manque pas grand chose pour que f soit injective (il suffit de la corestreindre à son image.

4. On a vu que $\forall x \in]1, +\infty[$, $\operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. On a donc

$$\operatorname{argch}'(x) = f'_{-1}(x).$$

On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 1, \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c.$$

Comme argch est continue, cette égalité est également vraie en $x = 1$. Pour $x = 1$, on a $\operatorname{argch}(1) = 0 = c$. On en déduit que

$$\forall x \geqslant 1, \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c.$$

Le seul qui m'a fait cette question a intégré sans constante d'intégration... quelle tristesse!

5. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f'_1(x)$. Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + d.$$

En prenant $x = 0$, on obtient $d = 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Exercice 3 1. (a) Soit $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(\arccos(x)) &= \sqrt{\sin^2 \arccos(x)} \\ &\text{car } \arccos(x) \in [0, \pi] \text{ et sin est positive sur cet intervalle} \\ &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{\cos^2 \arcsin(x)} \\ &\text{car } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et cos est positive sur cet intervalle} \\ &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Le rigoureusement portait sur la justification de $\sin = \sqrt{1-\cos^2}$ car celle-ci, et sa copine symétrique avec cos, ne sont pas toujours vraies. En effet, $x^2 = a$ n'implique pas $x = \sqrt{a}$!!! On a juste $x = \pm\sqrt{a}$ et puis on peut dire des choses si x est de signe constant.

(b) Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

C'est dommage de m'écrire $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$ sans me préciser pour quelles valeurs de x cette égalité est vraie.

2. Les fonctions arcsin et arccos sont définies sur $[-1,1]$ donc $f(x)$ existe si et seulement si on a $-1 \leqslant 3x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant 2x \leqslant 1$ ce qui donne $I = [-1/3, 1/3]$

3. La fonction f est dérivable sur $]-1/3, 1/3[$ et
$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9\,x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-4\,x^2}}$$
donc f est strictement croissante. On a $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = -\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -\pi - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$. De même, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2}{3} = \arcsin\frac{2}{3}$. On a donc:

x	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$f'(x)$	$+$	
f	$\alpha \nearrow$	β

Avec $\alpha = f(-1/3) = -\pi - \arcsin\frac{2}{3}$ et $\beta = f(1/3) = \arcsin\frac{2}{3}$

   - De manière générale, c'est mieux de s'interroger sur la dérivabilité d'une fonction AVANT de la dériver. On évite d'écrire $f'(x)$ sans préciser pour quelles valeurs de x l'égalité est vraie. On évite aussi de déterminer les points d'annulation de la dérivée (on s'en moque, on veut son signe!). On écrit calmement arccos en fonction de arcsin et on évite de perdre des points en manipulant des nombres relatifs !!

4. La fonction f est strictement croissante donc injective . De plus elle est continue donc $f(I)$ est un intervalle et d'après le tableau $f(I) = J = [-\pi - arcsin(2/3), arcsin(2/3)]$. On en déduit que f induit une bijection de I vers $f(I)$, autrement dit $g = f|^{[-\pi - arcsin(2/3), arcsin(2/3)]}$ est bijective.
Les mêmes erreurs courantes que pour ch et sh. On commence par l'injectivité, on considère l'image de l'intervalle restreint (ou de tout l'intervalle ici) et on corestreint à cette image. $a = \sqrt{13}$ est l'unique solution de $f(x) = 0$

5. Grâce aux formules de trigonométrie, on peut dire que
$$\sin(f(x)) = \sin(\arcsin(3x))\cos(\arccos(2x)) - \sin(\arccos(2x))\,\cos(\arcsin(2x)) = 6\,x^2 - \sqrt{1-4\,x^2}\sqrt{1-9\,x^2}$$
en utilisant les simplifications de la première question.

6. On raisonne par implication :
$$\begin{aligned} f(x) = t &\implies \sin(f(x)) = \sin(t) \\ &\implies 6\,x^2 - \sqrt{1-4\,x^2}\sqrt{1-9\,x^2} = \sin(t) \\ &\implies (6\,x^2 - \sin(t))^2 = (1-4x^2)(1-9x^2) \\ &\implies 36\,x^4 - 12\,x^2\,\sin(t) + \sin(t)^2 = 1 - 13\,x^2 + 36\,x^4 \\ &\implies (13 - 12\,\sin(t))x^2 = 1 - \sin(t)^2 = \cos(t)^2 \\ &\implies x = \pm\frac{\cos(t)}{\sqrt{13 - 12\,\sin(t)}} \end{aligned}$$
celle-là aussi elle vous a posé souci alors je vous le dis une fois pour toute: avant de mettre au carré, on isole la racine carrée !

7. On sait que $f(0) = -\pi/2$ et comme f est croissante :

$$x \geqslant 0 \Longrightarrow t = f(x) \in [-\pi/2, \arcsin(2/3)] \Longrightarrow \cos(t) \geqslant 0$$
$$x \leqslant 0 \Longrightarrow t = f(x) \in [-\pi - \arcsin(2/3), -\pi/2] \Longrightarrow \cos(t) \leqslant 0$$

Ainsi x et $\cos(t)$ ont le même signe donc $f(x) = t \Rightarrow x = \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{13 - 12\,\sin(t)}}$.

Or, on a vu que si $t \in [-\pi - \arcsin(2/3), \arcsin(2/3)]$, $f(x) = t$ admet une unique solution. On en déduit donc que

$$g^{-1}(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{13 - 12\,\sin(t)}}$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère l'équation (E_n) : $nz^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^\star$.

1. On remarque que 1 est racine du polynôme $nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ donc $nz^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ peut être factorisé par $(z-1)$.

2. On peut partir du membre de droite :

$$\begin{aligned}(z-1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}(z-1)z^k = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}(z^{k+1} - z^k)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}(z^n - z^j) = nz^n - \sum_{j=0}^{n-1} z^j\end{aligned}$$

On a bien le résultat souhaité. On peut également partir du membre de gauche :

$$\begin{aligned}nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(z^n - z^k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^k(z^{n-k} - 1) \text{ en uti}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^k(z-1)\sum_{j=0}^{n-k-1} z^j \text{ en utilisant la factorisation } a^r - b^r = (a-b)\sum\dots\\ &= (z-1)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1} z^{k+j}\\ &= (z-1)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=k}^{n-1} z^p \text{ en po}\\ &= (z-1)\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p} z^p\\ &= (z-1)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)z^p\end{aligned}$$

On a bien le résultat souhaité.

On peut aussi raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
& nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k \\
\Leftrightarrow\ & nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k \\
\Leftrightarrow\ & nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}kz^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\
\Leftrightarrow\ & nz^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left((k+1)z^{k+1} - kz^k\right) \\
\Leftrightarrow\ & nz^n = nz^n - 0.z^0
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi.

Il fallait bien la prendre cette égalité, vous n'avez pas trop réussi mais comme elle était donnée, on pouvait l'admettre

3. Supposons, par l'absurde, que (E_n) admet une solution réelle x positive différente de 1. On a alors, d'après la question précédente, on a $(x-1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = 0$ ce qui est absurde car c'est une somme de réels positifs, le premier étant non nul, elle est donc non nulle. On en déduit que (E_n) n'admet pas de solution réelle positive différente de 1.

4. On suppose que (E_n) admet une solution z vérifiant $|z| > 1$.

   (a) Soit $u \in \mathbb{C}^\star$ tel que $|z| > 1$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|u^k|}$. Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\left|u^k\right| = |u|^k$ et $\frac{1}{|u|^k} < 1$. On a donc $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u^k}\right| < \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{=n}$ d'où l'inégalité souhaitée.
   Mais pourquoi elle vous a autant posé de problème cette question ????

   (b) On suppose que z est solution, on a donc $nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ d'où $n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z^{n-k}}$. On pose $j = n-k$, on a alors

   $$n = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z^j}$$

   Or, d'après la question précédente, si $|z| > 1$, on a $\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z^j}\right| < n$ ce qui contredit l'égalité que l'on vient de montrer. On aboutit à une contradiction, (E_n) n'admet donc pas de racine de module strictement supérieur à 1.

5. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. On suppose que $z = e^{i\theta}$ est solution de (E_n).

   (a) On a

   $$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{in\theta/2}2i\sin\frac{n\theta}{2}}{e^{i\theta/2}2i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{e^{i(n-1)\theta/2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

On a supposé que $nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$, on a donc

$$ne^{in\theta} = \frac{e^{i(n-1)\theta/2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ donc } e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{n\sin\frac{\theta}{2}}$$

(b) La question précédente montre que $e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}}$ est réel. Comme c'est un complexe de module 1, il vaut nécessairement 1 ou -1.

(c) On a $z^{\frac{n+1}{2}} = \pm 1$ d'après la question précédente, donc $z^{n+1} = 1$.

(d) On a $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 0$. Or $nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ et $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k - z^n = -z^n$. On a donc $(n+1)z^n = 0$ d'où $z = 0$ ce qui est une contradiction.

6. Des questions précédentes, on en déduit que les solutions de (E_n) ne peuvent être de module supérieur ou égal à 1 (sauf $z = 1$) et ne peuvent être réelles positives (toujours sauf $z = 1$). Autrement dit, l'ensemble des solutions est inclus dans l'ensemble

$$\{1\} \cup \{z \in \mathbb{C}^\star, |z| < 1\} \backslash]0,1[$$

7. Soit z une solution de (E_n) différente de 1. On a donc $|z| < 1$. On souhaite montrer que les solutions de (E_n) se rapprochent du cercle unité quand n tend vers $+\infty$. À cette fin, on pose $m_n = \min\{|z|, z \text{ solution de } E_n\}$ et on souhaite montrer que $m_n \to 1$.

(a) Par hypothèse, on a $nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ donc $(1-z)nz^n = 1 - z^n$ puis $1 = z^n + (1-z)nz^n$ et enfin, $1 = (1 + n(1-z))\, z^n$.

(b) On a $|(1+n(1-z))\, z^n| \leqslant (1 + n(1+|z|))\, |z|^n < (2n+1)\, |z^n|$ donc $(2n+1)\, |z|^n \geqslant 1$.

(c) On sait que m_n est le minimum, c'est donc un élément de l'ensemble autrement dit, il existe une racine α de (E_n) telle que $m_n = |\alpha|$. D'après la question précédente, on a $(2n+1)\, |\alpha|^n \geqslant 1$ donc $(2n+1)m_n \geqslant 1$. On en déduit que $m_n \geqslant \frac{1}{(2n+1)^{1/n}}$.

(d) On écrit $(2n+1)^{1/n} = exp\left(\frac{\ln(2n+1)}{n}\right)$. et

$$\frac{\ln(2n+1)}{n} = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n},$$

ce qui tend vers 0 par croissances comparées. On a donc bien, par continuité de l'exponentielle, $m_n \to 1$ par le thm des gendarmes.

PERSONNE ne m'a cité le théorème de croissances comparées. J'ai vu, au mieux, des " ça tend vers 1 car $\frac{1}{n} \to 0$.... vous voulez dire comme dans $(e^n+1)^{1/n}$???? ah ben non, ça tend vers e ! (et j'aurais pu être carrément désagréable en prenant $\left(e^{n^2}+1\right)^{1/n}$)

Correction du DS d'entrainement n 3

Exercice 1 **Partie A Lieux de points**

1. *Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.*
   Considérons les points C d'affixe $z_C = 1$ et D d'affixe $z_D = -1$ On a

$$f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-(-1)| \Leftrightarrow |z_M - z_C| = |z_M - z_D| \Leftrightarrow CM = DM$$

   donc le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$ est la médiatrice du segment $[CD]$, il s'agit de l'axe des ordonnées (droite d'équation $x = 0$).

   On vous demande un lieu géométrique, lorsque vous me répondez " les imaginaires purs", vous ne répondez donc pas à la question

2. *Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$*
   Posons $z = x + iy$. On a

$$\begin{array}{ll} & |f(z)| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{|z-1|}{|z+1|} = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & |z-1| = \sqrt{2}|z+1| \\ \Leftrightarrow & |x+iy-1|^2 = 2|x+iy+1|^2 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + y^2 = 2\left((x+1)^2 + y^2\right) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2\left(x^2 + 2x + 1 + y^2\right) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 4x + 2 + 2y^2 \\ \Leftrightarrow & 0 = x^2 + 6x + y^2 + 1 \\ \Leftrightarrow & 0 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 9 - 9 + y^2 + 1 \\ \Leftrightarrow & 0 = (x+3)^2 + y^2 - 8 \\ \Leftrightarrow & (x+3)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \end{array}$$

   Conclusion: Le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{2}$ est le cercle de centre $\Omega(-3; 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

   Je ne vous cache pas que celle-là vous a posé problème, y compris à ceux qui ont pensé à poser $z = x + iy$.

Partie B Étude d'une suite récurrente

1. (a) *Montrer que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution, puis que pour tout nombre complexe $\omega \neq 1$, l'équation $f(z) = \omega$ admet une unique solution que l'on exprimera en fonction de ω.*

   Montrons que l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution.
   Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = 1 \Leftrightarrow z - 1 = z + 1 \Leftrightarrow 0 = 2$$

ce qui est faux quelque soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
Donc l'équation $f(z) = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Soit $\omega \neq 1$. On a

$$\begin{array}{ll} & f(z) = \omega \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z-1}{z+1} = \omega \\ \Leftrightarrow & z - 1 = \omega(z+1) \\ \Leftrightarrow & z - 1 = \omega z + \omega \\ \Leftrightarrow & (1-\omega)z = 1 + \omega \\ \Leftrightarrow & z = \frac{1+\omega}{1-\omega} \text{ car } w \neq 1 \end{array}$$

Donc l'équation $f(z) = \omega$ admet pour unique solution $z = \dfrac{1+\omega}{1-\omega}$.

(b) *La fonction f est-elle injective? Surjective?*

Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'équation $f(z) = \omega$ admet aucune ou une unique solution donc f est injective.
$1 \in \mathbb{C}$ n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective.

(c) *Montrer que pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.*

f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
$f(0) = -1$ et $f(1) = 0$
donc -1 a pour antécédent 0 et 0 a pour antécédent 1. Par injectivité de f, ce sont les seuls antécédents de -1 et 0. De plus, d'après la question 1.(a), 1 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
Certains ont résolu $f(z) = 0$ et $f(z) = 1$. Dans ce cas, inutile d'invoquer l'injectivité de f.

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2. (a) *Résoudre l'équation $f(z) = z$.*

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$,

$$\begin{array}{ll} & f(z) = z \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z-1}{z+1} = z \\ \Leftrightarrow & z - 1 = z(z+1) \\ \Leftrightarrow & z^2 = -1 \\ \Leftrightarrow & z = \pm i \end{array}$$

L'ensemble de solution est $\{-i; i\}$

(b) *Que dire de la suite (u_n) si $u_0 \in \{-i, i\}$?*

Si $u_0 = i$ alors $u_1 =$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = i$ et la suite est constante.

De même, si $u_0 = -i$, la suite est constante.

Certains m'ont dit " si $u_0 \in \{\pm i\}$, alors pour tout n, $u_n \in \{\pm i\}$ ce qui est vrai mais moins précis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante.

(c) *Montrer que si $u_0 \notin \{-i, i\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \{-i, i\}$.*

On va montrer la contraposée, à savoir $\exists n \in \mathbb{N}, u_n = \pm i$ implique $u_0 = \pm i$.

On suppose donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \pm i$. Si $n = 0$, c'est bon. Sinon, on a $n \geqslant 1$ et $f(u_{n-1}) = \pm i$. Par injectivité de la fonction, on a donc $u_{n-1} = \pm i$. Si $n - 1 = 0$, on s'arrête. Sinon, on refait le même raisonnement. Par récurrence descendante, on obtient finalement $u_0 = \pm i$. On peut aussi raisonner par récurrence sur n: Soit $u_0 \notin \{-i, i\}$, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin \{-i, i\}$.

Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 \notin \{-i, i\}$ par hypothèse.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$,

supposons que $u_n \notin \{-i, i\}$. On a $u_n \neq i$ donc, d'après la question 2.(a), $f(u_n) \neq i$ et $u_n \neq -i$ donc, d'après la question 2.(a), $f(u_n) \neq -i$. On a donc $u_{n+1} \notin \{-i, i\}$

Conclusion

Par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin \{-i, i\}$$

Beaucoup de raisonnements confus sur cette question. Certains se sont lancés dans une récurrence mais on ne comprend pas très bien quelle propriété vous êtes en train de montrer. D'autres montrent que $u_n \in \{\pm i\} \Rightarrow u_{n-1} \in \{\pm i\}$ et s'arrêtent là. J'ai eu aussi des phrases très ambiguës du style si $u_n \notin \{\pm i\}$, alors $u_{n+1} \notin \{\pm i\}$ car $\pm i$ sont les deux seules solutions à $f(z) = z$. Et donc ? est-ce qu'on ne pourrait pas avoir $u_n = i$ et $u_{n+1} = -i$ (la réponse est non car f est injective mais ça ne saute pas aux yeux que vous aviez pensé à ce cas là quand vous l'avez écrit).

Enfin, j'ai eu des raisonnements par l'absurde où vous supposez $u_0 \in \{\pm i\}$ et là, j'ai beau réfléchir, je ne vois pas comment ça permettrait de montrer l'implication demandée.

On suppose maintenant que $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, -i, i\}$ et on introduit la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - i}{u_n + i}$$

D'après la question précédente, la suite (v_n) et bien définie puisque $u_0 \neq -i$ et donc pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq -i$.

3. (a) *Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-i$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-i}{u_{n+1}+i} = \frac{\frac{u_n-1}{u_n+1}-i}{\frac{u_n-1}{u_n+1}+i} = \frac{u_n-1-i(u_n+1)}{u_n-1+i(u_n+1)} \\ &= \frac{u_n-1-iu_n-i}{u_n-1+iu_n+i} = \frac{(1-i)u_n-(1-i)(i)}{(1+i)u_n+(1+i)i} = \frac{1-i}{1+i}\frac{u_n-i}{u_n+i} \\ &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}v_n \\ &= \frac{-2i}{2}v_n \\ &= (-i)v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q=-i$.

(b) *Montrer que la suite (v_n) est périodique de période 4 et que ses termes sont les affixes d'un carré.*

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-i)^n v_0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+4} = (-i)^{n+4}v_0 = (-i)^n(-i)^4 v_0 = (-i)^n v_0 = v_n$.
Donc la suite (v_n) est périodique de période 4

Considérons les points du plan complexe, A d'affixe v_0, D d'affixe v_1,C d'affixe v_2, et B d'affixe v_3.
Alors

$$z_B = iz_A = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}z_A,\ z_C = iz_B = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}z_B,\ z_D = iz_C = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}z_C$$

Donc A, B, C et D sont les images par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ des points D, A, B, C. Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont orthogonales et de même longueur, A, B, C et D sont les quatre sommets d'un carré.

(c) *Montrer que la suite (u_n) est également périodique de période* 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, On a

$$\begin{aligned} & v_n = \frac{u_n-i}{u_n+i} \\ \Leftrightarrow\ & v_n(u_n+i) = u_n-i \\ \Leftrightarrow\ & v_nu_n + v_n \times i = u_n - i \\ \Leftrightarrow\ & u_nv_n - u_n = -iv_n - i \\ \Leftrightarrow\ & u_n(v_n-1) = -iv_n - i \end{aligned}$$

On remarque que $v_n \neq 1$ car $v_0 \neq 1$.
d'où
$u_n = -i\dfrac{v_n+1}{v_n-1}$

La suite (v_n) est périodique de période 4 donc la suite (u_n) est périodique de période 4.

Exercice 2 1. (a) La fonction $\mathrm{ch}|_{\mathbb{R}^+}$ est strictement croissante donc injective. Elle induit donc une bijection vers $\mathrm{ch}(\mathbb{R}+) = [1, +\infty[$.
Attention, certains oublient complètement de me parler de ce qui se passe à l'arrivée !!! D'autres me disent qu'il suffit de corestreindre à son image et ça s'est faux en général :

Prenez cette fonction

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Alors $f|_{\mathbb{R}^+}$ est strictement décroissante donc injective. Si vous corestreignez à l'image de f à savoir $]-\infty, 1]$, vous n'obtenez pas une fonction bijective! Il faut corestreindre à $\mathrm{Im}(f|_{\mathbb{R}^+}) = f(\mathbb{R}^+)$ (qui vaut ici $]0,1]$). J'ai vu des $\mathrm{Im}(\mathbb{R})$ ce qui n'a aucun sens... attention à ce que vous écrivez.

(b) La dérivée de ch est sh qui s'annule en 0 et $\mathrm{ch}(0) = 1$ donc argch n'est pas dérivable en 1.

$$\forall x \in]1, +\infty[, \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh} \circ \mathrm{argch}(x)}.$$

On a $\mathrm{argch}(x) > 0$ donc $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) > 0$. On peut donc écrire

$$\mathrm{sh} \circ \mathrm{argch}(x) = \sqrt{\mathrm{sh}^2 \circ \mathrm{argch}(x)} = \sqrt{\mathrm{ch}^2 \circ \mathrm{argch}(x) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Là, ça a été un carnage. Voilà les erreurs courantes vues dans vos copies.

- argch est dérivable car ch l'est (raté, il faut regarder où/si la dérivée s'annule)
- ch^{-1}. J'ai même du mal à l'écrire tellement ça pique les yeux: ch N'est PAS bijective !!!!
- argch est définie sur .... (remplacer par tout ce qui vous passe par la tête). Là, je suis très surprise. Si vous avez défini argch comme la bijection réciproque de $\mathrm{ch}|_{\mathbb{R}^+}^{[1,+\infty[}$, vous savez que argch est définie sur $[1, +\infty[$ et a pour espace d'arrivée $\mathbb{R}^+$.
- Certains ont étudié $\mathrm{ch}(x) = a$ alors qu'on vous dit explicitement qu'on ne veut pas d'expression de argch.
- En revanche, une expression de la dérivée de argch signifie une expression à l'aide de x! Seuls 3 ou 4 d'entre vous ont pensé à simplifier la dérivée.

2. (a) sh est strictement croissante donc injective et son image vaut $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue et $\lim_{x \to \pm\infty} sh(x) = \pm\infty$. On en déduit qu'elle est bijective.

(b) La dérivée de sh est ch qui ne s'annule pas donc argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch} \circ \mathrm{argsh}(x)}.$$

Comme ch est positive, on peut écrire

$$\mathrm{ch} \circ \mathrm{argsh}(x) = \sqrt{\mathrm{ch}^2 \circ \mathrm{argsh}(x)} = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 \circ \mathrm{argsh}(x)} = \sqrt{1 + x^2}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Là encore, j'ai vu des erreurs similaires à celle de ch.

3. (a) On procède par disjonction de cas:

- **Si** $a > 0$ **alors** pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sqrt{x^2+a} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x \Longrightarrow \sqrt{x^2+a} + x > 0$$

Donc, pour $a > 0$ **,** $D_a = \mathbb{R}$ **et** f_a **est définie sur** $\mathbb{R}$

- **Si** $a < 0$ **alors** pour avoir $x^2 + a \geqslant 0$, il faut que $x \leqslant -\sqrt{|a|}$ ou $x \geqslant \sqrt{|a|}$.
Si $x \geqslant \sqrt{|a|} > 0$ alors $\sqrt{x^2+a} + x > 0$ donc $f(x)$ existe
Si $x \leqslant -\sqrt{|a|} < 0$ alors $x = -|x|$ et

$$\sqrt{x^2+a} < \sqrt{x^2} = |x| = -x \Longrightarrow \sqrt{x^2+a} + x < 0$$

donc $f(x)$ n'existe pas
Au final, pour $a < 0$ **,** $D_a = [\sqrt{|a|}, +\infty[$

- **Il reste** $a = 0$, alors $f(x) = ln(x + |x|)$ et

$$x \leqslant 0 \Longrightarrow x + |x| = 0 \Longrightarrow f(x) \quad \text{n'existe pas}$$

Au final, pour $a = 0$ **,** $D_a =]0, +\infty[$

Celle-là aussi, ça a été un massacre. Je vous rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$ (donc pas toujours x). Je me permets aussi de vous dire que $\sqrt{a+x^2} > x$ ne garantit pas $x + \sqrt{a+x^2} > 0$ (à moins de justifier que la première est vraie pour tout réel x donc aussi pour $-x$).

(b) Pour $x > 0$, on écrit

$$f_a(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) = \ln(x) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{x^2}}\right),$$

et $\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{x^2}}\right) \to \ln(2)$.

On a donc $f_a(x) = \ln(x)\left(1 + \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{x^2}}\right)}{\ln(x)}}_{\to 0}\right) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$.

on demandait une expression SIMPLIFIEE !!!

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in D_a$,

$$f_a'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}}{x + \sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

(d) D'après la question précédente, la fonction f_a est strictement croissante sur son domaine de définition. Pour dresser le tableau de variations, on raisonne à nouveau par disjonction de cas.

- Si $a > 0$, on a, en multipliant par la quantité conjuguée:

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+a} - x}\right) = -\infty,$$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
f_a	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

En effet,

$$x+\sqrt{x^2+a}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}-x},$$

en multipliant par la quantité conjuguée donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+a}=0$ et

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)=-\infty$$

Visiblement, beaucoup ne savaient pas comment calculer cette limite.

- Si $a<0$, $\lim\limits_{x\to|a|} f_a(x)=\lim\limits_{x\to|a|} \ln(x+\sqrt{x^2-|a|}=\ln|a|$. On a donc

x	$\sqrt{\lvert a\rvert}$	$+\infty$
f_a	$\frac{1}{2}\ln\lvert a\rvert$ $\nearrow$	$+\infty$

- Si $a=0$, on a

x	0	$+\infty$
f_a	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

(e) D'après les tableaux de variations, pour $a\geqslant 0$, f_a a pour image $\mathbb{R}$. Comme elle est strictement croissante, elle est bijective.

(f) Soit $y\in\mathbb{R}$. Comme on sait déjà que $f_a(x)=y$ admet une unique solution, on peut raisonner par implication.

$$\begin{aligned}
& f_a(x)=y\\
\iff\ & x+\sqrt{x^2+a}=e^y\\
\iff\ & \sqrt{x^2+a}=e^y-x\\
\implies\ & x^2+a=(e^y-x)^2\\
\implies\ & x^2+a=e^{2y}-2xe^y+x^2\\
\implies\ & x=g_a(y)=\frac{e^{2y}-a}{2\,e^y}=\frac{e^y-ae^{-y}}{2}
\end{aligned}$$

Mais on a $e^y=ch(y)+sh(y)$ et $e^{-y}=ch(y)-sh(y)$ ce qui donne au final :

$$y=ch(y)\frac{1-a}{2}+sh(y)\frac{1+a}{2}$$

On en déduit que pour tout $x\in D_a$, $f_a^{-1}(x)=ch(x)\dfrac{1-a}{2}+sh(x)\dfrac{1+a}{2}$.

(g) Si $a<0$, alors f_a induit une bijection de $[\sqrt{|a|},+\infty[$ vers $[\frac{1}{2}\ln|a|\,,+\infty[$. Si on note g_a cette bijection induite, alors pour tout $y\in[\sqrt{|a|},+\infty[$, $g_a(x)=y\Rightarrow f_a(x)=y\Rightarrow x=$

$ch(y)\dfrac{1-a}{2}+sh(y)\dfrac{1+a}{2}$ car on n'utilise pas le fait que a est positif dans le calcul de la question précédente. On a donc

$$\forall x \in [|a|\,, +\infty[, g_a^{-1}(x) = ch(x)\frac{1-a}{2} + sh(x)\frac{1+a}{2}.$$

Beaucoup m'ont dit " non, pas de situation similaire car f_a n'est pas bijective. Vous voyez bien qu'il ne manque pas grand chose pour que f soit injective (il suffit de la corestreindre à son image.

4. On a vu que $\forall x \in]1, +\infty[$, $\operatorname{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. On a donc

$$\operatorname{argch}'(x) = f'_{-1}(x).$$

On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 1, \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c.$$

Comme argch est continue, cette égalité est également vraie en $x = 1$. Pour $x = 1$, on a $\operatorname{argch}(1) = 0 = c$. On en déduit que

$$\forall x \geqslant 1, \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c.$$

Le seul qui m'a fait cette question a intégré sans constante d'intégration... quelle tristesse!

5. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f_1'(x)$. Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + d.$$

En prenant $x = 0$, on obtient $d = 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Exercice 3 1. (a) Soit $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(\arccos(x)) &= \sqrt{\sin^2 \arccos(x)} \\ &\text{car } \arccos(x) \in [0, \pi] \text{ et sin est positive sur cet intervalle} \\ &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{\cos^2 \arcsin(x)} \\ &\text{car } \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et cos est positive sur cet intervalle} \\ &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Le rigoureusement portait sur la justification de $\sin = \sqrt{1-\cos^2}$ car celle-ci, et sa copine symétrique avec cos, ne sont pas toujours vraies. En effet, $x^2 = a$ n'implique pas $x = \sqrt{a}$!!! On a juste $x = \pm\sqrt{a}$ et puis on peut dire des choses si x est de signe constant.

(b) Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

C'est dommage de m'écrire $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$ sans me préciser pour quelles valeurs de x cette égalité est vraie.

2. Les fonctions arcsin et arccos sont définies sur $[-1,1]$ donc $f(x)$ existe si et seulement si on a $-1 \leqslant 3x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant 2x \leqslant 1$ ce qui donne $I = [-1/3, 1/3]$

3. La fonction f est dérivable sur $]-1/3, 1/3[$ et

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9\,x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-4\,x^2}}$$

donc f est strictement croissante. On a $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = -\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -\pi - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$. De même, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2}{3} = \arcsin\frac{2}{3}$. On a donc:

x	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$f'(x)$	$+$	
f	α $\nearrow$	β

Avec $\alpha = f(-1/3) = -\pi - \arcsin\frac{2}{3}$ et $\beta = f(1/3) = \arcsin\frac{2}{3}$

- De manière générale, c'est mieux de s'interroger sur la dérivabilité d'une fonction AVANT de la dériver. On évite d'écrire $f'(x)$ sans préciser pour quelles valeurs de x l'égalité est vraie. On évite aussi de déterminer les points d'annulation de la dérivée (on s'en moque, on veut son signe!). On écrit calmement arccos en fonction de arcsin et on évite de perdre des points en manipulant des nombres relatifs !!

4. La fonction f est strictement croissante donc injective . De plus elle est continue donc $f(I)$ est un intervalle et d'après le tableau $f(I) = J = [-\pi - arcsin(2/3), arcsin(2/3)]$. On en déduit que f induit une bijection de I vers $f(I)$, autrement dit $g = f|^{[-\pi - arcsin(2/3), arcsin(2/3)]}$ est bijective.
Les mêmes erreurs courantes que pour ch et sh. On commence par l'injectivité, on considère l'image de l'intervalle restreint (ou de tout l'intervalle ici) et on corestreint à cette image. $a = \sqrt{13}$ est l'unique solution de $f(x) = 0$

5. Grâce aux formules de trigonométrie, on peut dire que

$$\sin(f(x)) = \sin(\arcsin(3x))\cos(\arccos(2x)) - \sin(\arccos(2x))\,\cos(\arcsin(2x)) = 6\,x^2 - \sqrt{1-4\,x^2}\sqrt{1-9\,x^2}$$

en utilisant les simplifications de la première question.

6. On raisonne par implication :

$$\begin{aligned} f(x) = t &\implies \sin(f(x)) = \sin(t) \\ &\implies 6\,x^2 - \sqrt{1-4\,x^2}\sqrt{1-9\,x^2} = \sin(t) \\ &\implies (6\,x^2 - \sin(t))^2 = (1-4x^2)(1-9x^2) \\ &\implies 36\,x^4 - 12\,x^2\,\sin(t) + \sin(t)^2 = 1 - 13\,x^2 + 36\,x^4 \\ &\implies (13 - 12\,\sin(t))x^2 = 1 - \sin(t)^2 = \cos(t)^2 \\ &\implies x = \pm\frac{\cos(t)}{\sqrt{13 - 12\,\sin(t)}} \end{aligned}$$

celle-là aussi elle vous a posé souci alors je vous le dis une fois pour toute: avant de mettre au carré, on isole la racine carrée !

7. On sait que $f(0) = -\pi/2$ et comme f est croissante :

$$\begin{aligned}
x \geqslant 0 &\Longrightarrow t = f(x) \in [-\pi/2, \arcsin(2/3)] \Longrightarrow \cos(t) \geqslant 0\\
x \leqslant 0 &\Longrightarrow t = f(x) \in [-\pi - \arcsin(2/3), -\pi/2] \Longrightarrow \cos(t) \leqslant 0
\end{aligned}$$

   Ainsi x et $\cos(t)$ ont le même signe donc $f(x) = t \Rightarrow x = \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{13 - 12\sin(t)}}$.

   Or, on a vu que si $t \in [-\pi - \arcsin(2/3), \arcsin(2/3)]$, $f(x) = t$ admet une unique solution. On en déduit donc que

$$g^{-1}(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{13 - 12\sin(t)}}$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère l'équation (E_n) : $nz^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^\star$.

1. On remarque que 1 est racine du polynôme $nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ donc $nz^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ peut être factorisé par $(z-1)$.

2. On peut partir du membre de droite :

$$\begin{aligned}
(z-1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}(z-1)z^k = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}(z^{k+1} - z^k)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(z^n - z^j) = nz^n - \sum_{j=0}^{n-1} z^j
\end{aligned}$$

   On a bien le résultat souhaité. On peut également partir du membre de gauche :

$$\begin{aligned}
nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(z^n - z^k)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} z^k(z^{n-k} - 1) \text{ en uti}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} z^k(z-1)\sum_{j=0}^{n-k-1} z^j \text{ en utilisant la factorisation } a^r - b^r = (a-b)\textstyle\sum\ldots\\
&= (z-1)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1} z^{k+j}\\
&= (z-1)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=k}^{n-1} z^p \text{ en po}\\
&= (z-1)\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p} z^p\\
&= (z-1)\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)z^p
\end{aligned}$$

   On a bien le résultat souhaité.

On peut aussi raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
& nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k \\
\Leftrightarrow\ & nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k \\
\Leftrightarrow\ & nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}kz^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\
\Leftrightarrow\ & nz^n = \sum_{k=0}^{n-1}\left((k+1)z^{k+1} - kz^k\right) \\
\Leftrightarrow\ & nz^n = nz^n - 0.z^0
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi.

Il fallait bien la prendre cette égalité, vous n'avez pas trop réussi mais comme elle était donnée, on pouvait l'admettre

3. Supposons, par l'absurde, que (E_n) admet une solution réelle x positive différente de 1. On a alors, d'après la question précédente, on a $(x-1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = 0$ ce qui est absurde car c'est une somme de réels positifs, le premier étant non nul, elle est donc non nulle. On en déduit que (E_n) n'admet pas de solution réelle positive différente de 1.

4. On suppose que (E_n) admet une solution z vérifiant $|z| > 1$.

   (a) Soit $u \in \mathbb{C}^\star$ tel que $|z| > 1$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|u^k|}$. Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\left|u^k\right| = |u|^k$ et $\frac{1}{|u|^k} < 1$. On a donc $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u^k}\right| < \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{=n}$ d'où l'inégalité souhaitée.
   Mais pourquoi elle vous a autant posé de problème cette question ????

   (b) On suppose que z est solution, on a donc $nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ d'où $n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z^{n-k}}$. On pose $j = n-k$, on a alors

$$n = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z^j}$$

   Or, d'après la question précédente, si $|z| > 1$, on a $\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z^j}\right| < n$ ce qui contredit l'égalité que l'on vient de montrer. On aboutit à une contradiction, (E_n) n'admet donc pas de racine de module strictement supérieur à 1.

5. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. On suppose que $z = e^{i\theta}$ est solution de (E_n).

   (a) On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{in\theta/2}2i\sin\frac{n\theta}{2}}{e^{i\theta/2}2i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{e^{i(n-1)\theta/2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

On a supposé que $nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$, on a donc

$$ne^{in\theta} = \frac{e^{i(n-1)\theta/2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ donc } e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{n\sin\frac{\theta}{2}}$$

(b) La question précédente montre que $e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}}$ est réel. Comme c'est un complexe de module 1, il vaut nécessairement 1 ou -1.

(c) On a $z^{\frac{n+1}{2}} = \pm 1$ d'après la question précédente, donc $z^{n+1} = 1$.

(d) On a $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 0$. Or $nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ et $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k - z^n = -z^n$. On a donc $(n+1)z^n = 0$ d'où $z = 0$ ce qui est une contradiction.

6. Des questions précédentes, on en déduit que les solutions de (E_n) ne peuvent être de module supérieur ou égal à 1 (sauf $z = 1$) et ne peuvent être réelles positives (toujours sauf $z = 1$). Autrement dit, l'ensemble des solutions est inclus dans l'ensemble

$$\{1\} \cup \{z \in \mathbb{C}^\star, |z| < 1\} \backslash]0, 1[$$

7. Soit z une solution de (E_n) différente de 1. On a donc $|z| < 1$. On souhaite montrer que les solutions de (E_n) se rapprochent du cercle unité quand n tend vers $+\infty$. À cette fin, on pose $m_n = \min\{|z|, z \text{ solution de } E_n\}$ et on souhaite montrer que $m_n \to 1$.

(a) Par hypothèse, on a $nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ donc $(1-z)nz^n = 1 - z^n$ puis $1 = z^n + (1-z)nz^n$ et enfin, $1 = (1 + n(1-z))\, z^n$.

(b) On a $|(1 + n(1-z))\, z^n| \leqslant (1 + n(1 + |z|))\, |z|^n < (2n+1)\, |z^n|$ donc $(2n+1)\, |z|^n \geqslant 1$.

(c) On sait que m_n est le minimum, c'est donc un élément de l'ensemble autrement dit, il existe une racine α de (E_n) telle que $m_n = |\alpha|$. D'après la question précédente, on a $(2n+1)\, |\alpha|^n \geqslant 1$ donc $(2n+1)m_n \geqslant 1$. On en déduit que $m_n \geqslant \frac{1}{(2n+1)^{1/n}}$.

(d) On écrit $(2n+1)^{1/n} = exp\left(\frac{\ln(2n+1)}{n}\right)$. et

$$\frac{\ln(2n+1)}{n} = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{n},$$

ce qui tend vers 0 par croissances comparées. On a donc bien, par continuité de l'exponentielle, $m_n \to 1$ par le thm des gendarmes.

PERSONNE ne m'a cité le théorème de croissances comparées. J'ai vu, au mieux, des " ça tend vers 1 car $\frac{1}{n} \to 0$.... vous voulez dire comme dans $(e^n+1)^{1/n}$???? ah ben non, ça tend vers e ! (et j'aurais pu être carrément désagréable en prenant $\left(e^{n^2}+1\right)^{1/n}$)