Correction du DM 2

Partie I - Un exemple

1. On pose la fonction $g_\alpha : \left(\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \end{array} \right)$. Montrons qu'elle est positive.

   g_α est bien définie, car $\forall x > -1$, $x+1>0$. D'autre part, comme composée et somme de fonctions dérivables, g_α est dérivable sur $]-1,+\infty[$, et $\forall x > -1$:

   $$g'_\alpha(x) \ = \ \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha \ = \ \alpha\left((1+x)^{\alpha-1} - 1\right).$$

   On a donc les équivalences :

   $$\begin{aligned} g'_\alpha(x) \geqslant 0 &\iff (1+x)^{\alpha-1} \geqslant 1 \\ &\iff (\alpha-1)\ln(1+x) \geqslant 0 \qquad \text{(on a appliqué ln, strict. croissante)} \end{aligned}$$

   Pour $\alpha > 1$, on divise par $\alpha - 1 > 0$, et on poursuit :

   $$\begin{aligned} g'_\alpha(x) \geqslant 0 &\iff \ln(1+x) \geqslant 0 \\ &\iff 1+x \geqslant 1 \qquad \text{(on a appliqué exp, strict. croissante)} \\ &\iff x \geqslant 0 \end{aligned}$$

   D'où le tableau de variation suivant, pour $\alpha > 1$:

x	-1		0		$+\infty$
g_α	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g_\alpha(x)$	$+$				

   $g_\alpha(0) = 1^\alpha - 1 = 0$

   On a bien montré, pour $\alpha > 1$,
   que g_α était positive.
   Pour $\alpha = 1$, on a $\forall x > -1$: $g_1(x) = 1 + x - 1 - x = 0$. Donc g_1 est également positive.

   Pour la détermination du signe de $g'(x)$, le mieux est de raisonner par équivalence.

2. Fixons $x, y > 0$. Leur rôle dans cette inégalité est symétrique, donc quitte à les intervertir, on suppose que le plus grand d'entre eux est x. On écrit :

$$\begin{aligned}
(x+y)^\alpha &= \left(x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right)^\alpha = x^\alpha\left(1+\frac{y}{x}\right)^\alpha \\
&\geqslant x^\alpha\left(1+\alpha\cdot\frac{y}{x}\right) \qquad \text{(d'après la question précédente)} \\
&\geqslant x^\alpha + \alpha\cdot y\cdot x^{\alpha-1} \\
&\geqslant x^\alpha + 1\cdot y\cdot y^{\alpha-1} \qquad (\text{car } \alpha \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant y) \\
&\geqslant x^\alpha + y^\alpha.
\end{aligned}$$

Conclusion : par transitivité, on a bien $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.

3. L'inégalité $(x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$ est également vraie quand $x = 0$ ou $y = 0$, car il y a égalité. Elle est donc vraie pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, ce qui démontre que f_α vérifie la propriété (P_2).
D'autre part, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f_\alpha(xy) = x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha = f_\alpha(x)f_\alpha(y)$$

et cette égalité est également vérifiée quand $x = 0$ ou $y = 0$ puisqu'elle signifie alors que $0 = 0$.
La fonction f_α vérifie donc aussi (P_1).
Finalement, f_α est solution.

Ne pas oublier que l'on n'a pas montré (P_2) à la question précédente mais seulement pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$

Partie II - Quelques propriétés

1. Soit f une fonction constante à $C \in \mathbb{R}$. f est solution ssi la constante C vérifie :

$$\begin{cases} C = C^2 \\ C \geqslant C + C \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} C = 0 \text{ ou } C = 1 \\ C \leqslant 0 \end{cases}$$

La seule constante qui vérifie ce système de contraintes est $C = 0$. La fonction nulle est donc l'unique solution constante.

Il ne suffit pas de montrer que la fonction nulle est solution, il faut montrer que c'est la seule. Attention, $f(x) = 0$ n'est pas une fonction !!.

2. • Montrons que $f(0) = 0$. La propriété (P_1) pris en $x = y = 0$ donne $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0)$ vaut 0 ou 1. Montrons **par l'absurde** que $f(0) = 1$ est impossible. Supposons que $f(0) = 1$. Alors (P_1) pris en $x \in \mathbb{R}_+$ et $y = 0$ donne $f(0) = f(x)f(0)$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = 1$. Cela montre que f est la fonction constante à 1, d'où **contradition.**
Conclusion : par élimination, $f(0) = 0$.

On peut aussi écrire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = f(0x)$ donc $f(0) = f(0)f(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $f(0) \neq 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$ et f est constante ce qui est une contradiction.

Attention à bien préciser ce qu'est x. Beaucoup m'écrivent " on a $f(0) = f(0)f(x)$ donc si $f(0) \neq 0$, $f(x) = 1$ et f est constante. Pour commencer, vous parlez de $f(x)$ sans avoir défini x. Ensuite, si on ne sait pas si l'égalité est vraie pour tout x ou seulement pour un x donné, vous ne pouvez affirmer que f est constante.

- Montrons que $f(1)=1$. La propriété (P_1) pris en $x=y=1$ donne $f(1)=f(1)^2$, donc $f(1)$ vaut 0 ou 1. Montrons **par l'absurde** que $f(1)=0$ est impossible. Supposons que $f(1)=0$. Alors (P_1) pris en $x\in\mathbb{R}_+$ et $y=1$ donne $f(x)=f(x)f(1)=0$. Cela montre que f est la fonction constante à 0, d'où **contradiction**, puisque f est supposée non constante.
  Conclusion : par élimination, $f(1)=1$.

Là encore, attention à faire apparaître f constante en arrivant une égalité vraie pour tout x.

3. Fixons $x\geqslant 0$ et raisonnons par récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n)$: "$f(x^n)=f(x)^n$".

- Initialisation. $\mathcal{H}(0)$ signifie que $f(1)=f(1)^0=1$, ce qui est vrai.
- Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x^{n+1}) &= f(x^n\cdot x)\\ &= f(x^n)\cdot f(x) && \text{(d'après } (P_1))\\ &= f(x)^n\cdot f(x) && \text{(d'après } \mathcal{H}(n))\\ &= f(x)^{n+1}\end{aligned}$$

  Cela démontre $\mathcal{H}(n+1)$.
- Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

Certains montrent $HR(n+1)$ en montrant que cette propriété est équivalente à $HR(n)$. D'abord, pourquoi se mettre en danger en raisonnant par des équivalences alors que des implications suffisent ? Ensuite, si vous raisonnez par équivalence, il faut les justifier et pour justifier $f(x^n)=f(x)^n \Leftrightarrow f(x^n)f(x)=f(x)^{n+1}$, il faut dire que $f(x)\neq 0$ ce que vous ne savez pas encore (question suivante).

4. Soit $x>0$. On a d'une part

$$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(1)=1$$

et d'autre part par (P_1) :

$$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=1$, ce qui montre à la fois que $f(x)\neq 0$ (puisque sinon l'égalité serait impossible), et que $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$.

Beaucoup nient " pour tout $x>0, f(x)\neq 0$" par "$\forall x>0, f(x)=0$" ce qui est faux. Si vous supposez qu'il existe x tel que $f(x)=0$, certains écrivent ensuite $\forall y\in\mathbb{R}^+, f(xy)=0$ (ce qui est vrai) donc f est constante. Et là, je trouve ça un peu rapide. La définition de f constante n'est pas $\exists x>0$ tel que $\forall y\in\mathbb{R}^+$, $f(xy=)=0$. Assurez-vous donc que vous vous ramenez à la définition d'une fonction constante: soit $y\in\mathbb{R}^+$, $f(y)=f(x\times\dfrac{y}{x}=f(x)f\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$ donc f est nulle.

5. Soit $x>0$. On a $x=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$. Donc d'après (P_1) :

$$f(x)=f(\sqrt{x})\cdot f(\sqrt{x})=\left(f(\sqrt{x})\right)^2$$

Cela montre que $f(x)\geqslant 0$, et on sait déjà que $f(x)\neq 0$, donc finalement, $f(x)>0$.

Il faut penser à préciser que $f(x)$ est non nul pour affirmer que l'inégalité est stricte. Certains ont raisonné avec x^2, cela n'aboutit qu'à $f(x)^2=f(x)^2$ ce qui ne montre pas que $f(x)$ est positif. Pour rappel, $\sqrt{f^2(x)}=|f(x)|$.

6. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Notons $t = y - x$, de sorte que $y = x + t$, et $t > 0$. On a alors :
$$\begin{aligned} f(y) &= f(x+t) \\ &\geqslant f(x) + f(t) \qquad \text{(d'après } (P_2)) \\ &> f(x) \qquad (\text{car } f(t) > 0 \ \text{ d'après la question précédente}) \end{aligned}$$
D'où $f(x) < f(y)$. On a bien montré que f est strictement croissante.

Là encore, assurez-vous de revenir à la définition de fonction strictement croissante. Beaucoup écrivent " $x + y > x$ donc $f(x+y) > f(x)$" ce qui n'est pas la définition de fonction croissante.

Partie III - Détermination des solutions

1. D'après la question 5 de la partie II, $f(2) > 0$, donc $\ln(f(2))$ est un nombre bien défini. De plus, d'après (P_2) :
$$f(2) = f(1+1) \geqslant f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$$
Donc $f(2) \geqslant 2$, et en appliquant ln (fonction croissante), on a $\ln(f(2)) \geqslant \ln(2)$.

2. Fixons $x > 0$. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} 2^q \leqslant x < 2^{q+1} &\iff \ln(2^q) \leqslant \ln(x) < \ln(2^{q+1}) \\ &\iff q\ln(2) \leqslant \ln(x) < (q+1)\ln(2) \\ &\iff q \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < q+1 \qquad (\ln(2) > 0 \text{ car } 2 > 1) \end{aligned}$$
Un seul et unique entier $q \in \mathbb{Z}$ vérifie ce dernier encadrement, et il s'agit de $\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \right\rfloor$, la partie entière de $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Cet entier est donc l'unique entier q qui vérifie $2^q \leqslant x < 2^{q+1}$.

Remarque: on aurait aussi pu argumenter en remarquant que les 2^q sont des nombres strictement croissants, qui tendent vers 0^+ lorsque $q \to -\infty$ et vers $+\infty$ lorsque $q \to +\infty$. Les intervalles $[2^q, 2^{q+1}[$, où $q \in \mathbb{Z}$, forment donc une partition de $\mathbb{R}_+^*$.

3. (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} 2^{q_p} \leqslant x^p < 2^{q_p+1} \quad &\text{donc} \quad q_p\ln(2) \leqslant p\ln(x) < (q_p+1)\ln(2) \\ &\text{donc} \quad \frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < \frac{q_p+1}{p} \end{aligned}$$
La partie gauche de l'encadrement est $\frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et la partie droite donne $\frac{q_p}{p} \geqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p}$. D'où :
$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p} < \frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$
Par le théorème des gendarmes, $\frac{q_p}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Vous devez encadrer $\frac{q_p}{p}$ pour appliquer le thm des gendarmes. Certains passent à la limite dans l'encadrement initial. C'est faux car pour ne savez pas si $\frac{q_p}{p}$ admet une limite. Certains encore, m'ont trouvé un encadrement avec q_p sur la droite et dit que $\lim q_p = +\infty$ (pourquoi???).

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a par définition : $2^{q_p} \leqslant x^p < 2^{q_p+1}$. On applique la fonction f (qui est croissante, d'après la question 6 de la partie II) pour obtenir :

$$f\left(2^{q_p}\right) \leqslant f\left(x^p\right) < f\left(2^{q_p+1}\right) \qquad (*)$$

D'après la question 3 de la partie II, on a $f(t^n) = f(t)^n$ pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. C'est en fait aussi vrai pour $n < 0$. En effet, si $n = -k$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la question 4 de la partie II :

$$f(t^n) = f\left(\frac{1}{t^k}\right) = \frac{1}{f(t^k)} = \frac{1}{(f(t))^k} = f(t)^{-k} = f(t)^n$$

Donc l'encadrement $(*)$ devient : $f(2)^{q_p} \leqslant f(x)^p < f(2)^{q_p+1}$.
De là, on a, en appliquant ln :

$$q_p \ln(f(2)) \leqslant p \ln(f(x)) < (q_p+1)\ln(f(2)) \quad \text{et donc} \quad \frac{q_p}{p} \leqslant \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} < \frac{q_p+1}{p}$$

La classe se divise en deux parties : ceux qui m'ont écrit "on sait que $f(x^n) = f(x)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et n'ont pas remarque que q_p était un entier relatif et ceux qui invoquent la question 3 (ou écrivent $f(x^n) = f(x)^n$ sans préciser où vit n sans se poser la question de " où vivent les objets que l'ont considère".

(c) Par passage à la limite $p \to +\infty$ (qui élargit les inégalités), en sachant que $\frac{q_p}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et $\frac{1}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \leqslant \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

On a donc :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \quad \text{donc} \quad \ln(f(x)) = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}\ln(x)$$

$$\text{donc} \quad f(x) = \exp\left(\frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}\ln(x)\right) \qquad (**)$$

On pose alors

$$\boxed{\alpha := \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}}$$

qui est bien supérieur à 1 (d'après la question 1 de cette partie), et l'égalité $(**)$ signifie précisément :

$$f(x) = e^{\alpha \ln(x)} = x^\alpha$$

4. On peut remarquer que l'égalité $f(x) = x^\alpha$ est aussi vraie pour $x = 0$, puisque $f(0) = 0$. On a donc $f = f_\alpha$.

Conclusion : les parties II et III ont montré que toute fonction solution était soit la fonction nulle, soit une fonction f_α, pour un $\alpha \geqslant 1$ (étape d'analyse). Réciproquement, la fonction nulle est bien solution, et d'après la partie I, les f_α aussi (étape de synthèse).
Les fonctions solutions du problème sont donc précisément la fonction nulle et les fonctions f_α, pour $\alpha \geqslant 1$.

On attend un raisonnement rigoureux pour la conclusion et pas juste "on a montré que les solutions sont ..."