Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2024-2025
DM 3

Devoir maison 3.

à rendre le 25 novembre pour les trinômes pairs.

Partie 1:

1. Prouver l'encadrement suivant pour $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$
$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1) \qquad (E^*)$$
2. En faisant la somme de ces inégalités, prouver que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. En déduire que $H_n \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = H_n - \ln(n)$, déterminer son sens de variation en utilisant l'encadrement (E^*).
5. En déduire que (u_n) converge, on notera γ sa limite.[1]
6. Application: On pose $P_n = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[n]{2}$. Prouver que
$$P_n \sim_{n\to+\infty} 2^{\gamma} \cdot 2^{ln(n)}$$

Partie 2:

1. Montrer, par récurrence sur n que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}, m \leqslant n, \displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
2. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall m \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{m}.$$
   (b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall m \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right)$$
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$$
   (b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n$$
   Indication: On pourra remarquer que $H_k^2 = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \right) H_k$.

---

[1] La constante γ est appelée constante d'Euler