Indications

1 Faire une étude de fonction.

2 Trouver un majorant et un minorant puis regarder si c'est le plus pertinent.

3 Si on trouve un majorant de l'ensemble, on sait qu'il est plus grand que le sup.

4 Utiliser le fait que le sup / inf est le plus petit/grand des majorants/minorants.

5 Montrer que $\lfloor x \rfloor + n$ vérifie la caractérisation de la partie entière de $x + n$.

7 Écrire les inégalités provenant de la définition de la partie entière.

8 Regardez sur des valeurs particulières de x ce qu'il se passe.

9 Commencer par montrer l'égalité pour $x \in [0, 1[$ puis généraliser en écrivant $x = a + \lfloor x \rfloor$ avec $a \in [0, 1[$.

10 Raisonner par équivalence.

11 Faire une disjonction de cas selon la parité de $n + m$.

12 Trouver un majorant et un minorant puis regarder si c'est le plus pertinent.

13
1. Raisonner par double inégalité en utilisant le fait qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \sup(B)$.
2. Raisonner par double inégalité.
3. Montrer que $\sup(A + B) - \inf(B)$ est un majorant de A.

14 Raisonnez par disjonction de cas selon que y est entier ou non.

15 Donner un encadrement de la fonction à l'aide de la définition de partie entière.

16 Raisonner par double implication.

17 Il faut d'abord écrire l'inégalité sans les sup puis "passer au sup" d'un coté, puis de l'autre de l'inégalité (en justifiant correctement !).

18 Étudier les variations de $f_a : x \mapsto x^2 + ax - 1$ sur $[0, 1]$.

19 Traiter dans un premier temps le cas où $x \in]0, 1]$ en déterminant quels termes de la somme sont nuls.

20 Montrer que $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ puis supposer par l'absurde qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < m < \sqrt{4n+2}$.

21 Regarder pour quels entiers k, la partie entière de $\sqrt{k}$ est identique (et les dénombrer !)