Correction du TD n 5

Correction 1 On écrit $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x}{2}\left(1 - e^{-2x}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln \mathrm{sh}(x) &= \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) + \ln\left(1 - e^{-2x}\right)\\
&= x - \ln(2) + \ln\left(1 - e^{-2x}\right)\\
&= x\left(1 + \frac{\ln(1-e^{-2x}) - \ln(2)}{x}\right)\\
&\sim x. \text{ car } \frac{\ln(1-e^{-2x}) - \ln(2)}{x} \to 0
\end{aligned}$$

On a donc $\ln(\mathrm{sh}(x)) \underset{+\infty}{\sim} x$.

Correction 2 On écrit :

$$\begin{aligned}
x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x) &= x\ln(x) + x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x\ln(x) - \ln(x)\\
&= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln(x)\\
&= -\ln(x)\left(\frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} + 1\right)
\end{aligned}$$

On a donc $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$.

Correction 3 On a

- $sqrt 1 + 2x = 1 + x - \dfrac{(2x)^2}{8} + o(x^2) = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $e^{2x} = 1 + (2x) + \dfrac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$

donc $\sqrt{1+2x} - e^{2x} = -\dfrac{5x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\sqrt{1+2x} - e^{2x} \sim -\dfrac{5x^2}{2}$.

On a $\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ et $\ln(1+2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ donc

$$\sin\sqrt{x} - \ln(1+2\sqrt{x}) = -\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

puis $\sin\sqrt{x} - \ln(1+2\sqrt{x}) \sim -\sqrt{x}$. On en déduit donc $\dfrac{\sqrt{1+2x} - e^{2x}}{\sin\sqrt{x} - \ln(1+2\sqrt{x})} \sim -\dfrac{5x\sqrt{x}}{2}$ donc la limite est nulle.

Correction 4 On a

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 + o(x^2),$$

et $\sin(x) - \tan(x) = x + o(x^2) - x + o(x^2) = o(x^2)$ donc $\ln(1+x^2) + \sin(x) - \tan(x) \sim x^2$.

On a également $e^x = 1 + x + o(x)$ et $\cos(x) = 1 + o(x)$ donc $e^x - \cos(x) = x + o(x)$ ce qui implique $e^x - \cos(x) \sim x$. On en déduit que

$$\frac{\ln(1+x^2) + \sin(x) - \tan(x)}{e^x - \cos(x)} \sim \frac{x^2}{x} \sim x.$$

Correction 5 On a $\dfrac{1}{x} \to 0$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $\ln(1+y) \sim_{y\to 0} y$ donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{x}$.

Correction 6 On écrit $x = 2 + h$ avec $h \to 0$ quand $x \to 2$. On a

$$\ln(x) = \ln(2+h) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) = \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + o(h^2) = \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2).$$

On n'oublie pas de revenir à x, le DL demandé est

$$\ln(x) = \ln(2) + \frac{(x-2)}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + o\left((x-2)^2\right).$$

On vérifie que le premier terme du DL ($\ln(2)$ a bien même limite que $\ln(x)$ quand x tend vers 2) et SURTOUT on ne développe pas $(x-2)^2$

Correction 7 On sait que $\sin x$ tend vers 0 quand $x \to 0$ donc $\dfrac{1}{1+\sin(x)} - 1 \sim \sin(x)$ puis $\dfrac{1}{1+\sin(x)} - 1 \sim x$ car $\sin(x) \sim x$. On a donc

$$\frac{1}{1+\sin(x)} = 1 - x + o(x)$$

On sait que $e^x \to 1$ quand $x \to 0$. On a $e^{e^x} - e = e\left(e^{e^x - 1} - 1\right)$. Comme $e^x - 1 \to 0$, on a $e^{e^x-1} - 1 \equiv e^x - 1$ puis, comme $e^x - 1 \equiv x$, on obtient $e^{e^x-1} - 1 \sim x$. En multipliant par e, on obtient

$$e\left(e^{e^x-1} - 1\right) \sim ex$$

d'où

$$e^{e^x} = e + ex + o(x)$$

Correction 8 La fonction est définie pour tout x non nul tel que $x(x+2)$ est positif donc sur $]-\infty,-2]\cup]0,+\infty[$. Elle est dérivable sur $]-\infty,2[\cup]0,+\infty[$ son domaine de définition et on a :

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\sqrt{x(x+2)}+\frac{2x+2}{2\sqrt{x(x+2)}}\right)e^{\frac{1}{x}}=\frac{x^2-2}{x\sqrt{x(x+2)}}e^{\frac{1}{x}}.$$

On a :

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}x\sqrt{1+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

par croissances comparées et :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to--\infty}f(x)=+\infty.$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Correction 9 Elle est définie lorsque $x^4-x^3\geqslant0$ c'est-à-dire pour $x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$. Elle est dérivable lorsque $x^4-x^3>0$ c'est-à-dire sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$. Pour tout $x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, on écrit :

$$g(x)=\exp\frac{1}{4}\ln(x^4-x^3),$$

on a donc :

$$g'(x)=\frac{1}{4}\frac{4x^3-3x^2}{x^4-x^3}\sqrt[4]{x^4-x^3}=\frac{1}{4}\frac{4x-3}{x^2-x}\sqrt[4]{x^4-x^3}.$$

Il n'y a pas de forme indéterminée dans les limites, on a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$			$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	1	$\nearrow$	$+\infty$

Correction 10 On passe à la forme exponentielle : $x^{1/x}=\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$. Par le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}=1$.

Correction 11 On passe à la forme exponentielle : $x^{\sqrt{x}}=\exp\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$. Par le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(x)=0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sqrt{x}}=1$.

Correction 12 On passe à la forme exponentielle : $x^{1/x}=\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0^+}x^{1/x}=0$.

Remarque. *Ici, pas de forme indéterminée donc pas besoin d'invoquer le théorème de croissances comparées.*

Correction 13 On a $2>1$ donc, par le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2^x}{x^3}\right)=+\infty$.

Correction 14 On a $\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}=\ln(x+3)e^{-x}\frac{1}{1+e^{-x}x^2}$. Par le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}x^2=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}x^2}=1$. On a donc $\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\sim\ln(x+3)e^{-x}$. On peut faire mieux en écrivant $\ln(x+3)e^{-x}=e^{-x}\ln(x)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$, on a donc $\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\sim e^{-x}\ln(x)$.

Par le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)e^{-x}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}=0$, on peut donc écrire

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)\right)=\ln\left(1+\underbrace{\left(\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)-1\right)}_{\to0}\right),$$

on a donc

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)\right)\sim\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)-1,$$

puis, toujours parce que $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}=0$,

$$\sim\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2},$$

puis

$$\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)-1\sim-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)^2.$$

Enfin, en utilisant l'équivalent trouvé au début, on a

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x+x^2}\right)^2\sim-\frac{1}{2}\ln^2(x)e^{-2x}.$$

Correction 15 On a $\tan(x)=\dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ donc :

$$\tan(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}.$$

Quand x tend vers 0, le dénominateur tend vers 1 et le numérateur tend vers 0 par le théorème de croissances comparées. En passant à l'exponentielle, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}=1.$$

Correction 16 On a :

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x\quad&\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln x=x\ln(\sqrt{x})\Leftrightarrow\ln x(\sqrt{x}-\tfrac{x}{2})=0\Leftrightarrow x=1\text{ ou }2\sqrt{x}=x\\&\Leftrightarrow x=1\text{ ou }x=4.\end{aligned}$$

Les solutions sont donc 1 et 4.

Correction 17 On a $e^x+e^{1-x}=e+1\Leftrightarrow e^x+\frac{e}{e^x}=e+1$. On pose $X=e^x$, on a alors $X^2-(1+e)X+e=0$, le discriminant $\Delta=(1-e)^2$ donc il y a deux racines mais une seule positive: $\frac{e}{2}$, la solution recherchée est donc x tel que $e^x=\frac{e}{2}$ soit $x=1-\ln 2$.

Correction 18 On a $x=\dfrac{1}{2}$ racine évidente et en cherchant encore, $x=\dfrac{1}{4}$.
On pose $f:x\mapsto x^x=\exp(x\ln(x))$. La fonction f est dérivable et $\forall x\in\mathbb{R}_+^\star$, on a $f'(x)=(\ln(x)+1)\,x^x$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	↘	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	↗	$+\infty$

On a $\dfrac{1}{4}\in\left]0,\dfrac{1}{e}\right[$ et f est strictement décroissante donc injective sur cet intervalle, $\dfrac{1}{4}$ est l'unique solution sur cet intervalle. On a également $\dfrac{1}{2}\in\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ et f est strictement croissante donc injective sur cet intervalle, $\dfrac{1}{2}$ est l'unique solution sur cet intervalle.

On en déduit que $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4}$ sont les deux seules solutions de cette équation.

Correction 19 1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\arctan(x)\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et cos est positif sur cet intervalle. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\cos\arctan x&=\sqrt{\cos^2\arctan x}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\arctan(x)}}\text{car }1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\cos\arctan(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Pour $x\in[0,\pi]$, on a $\arccos\cos(x)=x$.
Pour $x\in[-\pi,0]$, on a $-x\in[0,\pi]$ et $\cos(-x)=\cos(x)$ donc, d'après ce qui précède, $\arccos\cos(x)=-x$.
Enfin, pour $x\in\mathbb{R}$, $\exists n\in\mathbb{Z}$ tel que $x+2n\pi\in[-\pi,\pi]$, on a alors :

$$\cos\arccos(x)=\begin{cases}x+2n\pi & \text{si }x+2n\pi\in[0\pi]\\-(x+2n\pi) & \text{si }x+2n\pi\in[-\pi,0]\end{cases}$$

3. Pour $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\arcsin\sin(x)=x$.
Pour $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$, on a $\pi-x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(\pi-x)=\sin(x)$ donc, d'après ce qui précède, $\arcsin\sin(x)=\pi-x$.
Enfin, pour $x\in\mathbb{R}$, $\exists n\in\mathbb{Z}$ tel que $x+2n\pi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$, on a alors :

$$\sin\arcsin(x)=\begin{cases}x+2n\pi & \text{si }x+2n\pi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \\(1-2n)\pi-x & \text{si }x+2n\pi\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]\end{cases}$$

Correction 20 Pour $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\arctan\tan(x)=x$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, $\exists n\in\mathbb{Z}$ tel que $x+n\pi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a alors : $\arctan\tan(x)=x+n\pi$ par π-périodicité de tan.

Correction 21 1. Il faut $x > 0$, $x < 1$ et $\sqrt{1-x} \in [-1,1]$ ce qui est le cas si $x \in [0,1]$. On a :

$$\begin{array}{ll} & \arcsin(\sqrt{x}) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \arcsin(\sqrt{\frac{1}{2}}) - \arcsin(\sqrt{1-x}) \\ \Leftrightarrow & \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{1-x}) \end{array}.$$

Comme $\sqrt{x}$ et $\sqrt{1-x}$ sont deux quantités positives, on sait que $\arcsin(\sqrt{x})$ et $\arcsin(\sqrt{1-x})$ appartiennent à $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-x} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel sin est injectif donc :

$$\begin{array}{ll} & \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{1-x}) \\ \Leftrightarrow & \sin\left(\arcsin(\sqrt{x})\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{1-x})\right) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x} = \cos(\arcsin(\sqrt{1-x})) \end{array}$$

Or, cos est positif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc

$$\cos(\arcsin(\sqrt{1-x})) = \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin\sqrt{1-x}} = \sqrt{x}.$$

La dernière égalité est vraie. Par équivalence, l'égalité initiale est donc vraie pour tout $x \in [0,1]$.

Correction 22 On pose $\beta = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3})$. Comme arctan a pour image $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\sqrt{3} < 2$, on a $\arctan(2) \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ceci étant également vrai pour $\arcsin 3$ et $\arctan(2+\sqrt{3})$, on a $\beta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. Or tan est injective sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ donc :

$$\begin{array}{ll} & \beta = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow & \tan\beta = \tan\left(\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3})\right). \end{array}$$

En utilisant la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$, on trouve :

$$\tan\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}.$$

Comme $\beta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, on a $\beta = \dfrac{7\pi}{6}$.

Correction 23 On remarque que $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\dfrac{2x}{3}\right)$ ont même signe : positif lorsque x est positif, négatif sinon. On peut donc affirmer que : $x \geqslant 0$. Cela implique :

$$\arctan(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

On a:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{2x}{3}\right),$$

et les deux membres de la deuxième égalité appartiennent à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel tan est injective. On peut donc raisonner par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \arctan(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) \Leftrightarrow x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{2x}{3}\right)\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{1-\frac{2x}{3}}{1+\frac{2x}{3}} \\ \Leftrightarrow & x\left(1+\frac{2x}{3}\right) = 1 - \frac{2x}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{3}x^2 + \dfrac{5x}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = \dfrac{-5 \pm 7}{4} \\ \Leftrightarrow & x = \dfrac{1}{2} \text{car } x \geqslant 0 \end{array}$$

L'unique solution est donc $x = \dfrac{1}{2}$

Correction 24 L'image de arcsin est $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, celle de arccos est $[0,\pi]$ donc, pour qu'il y ait égalité, les deux membres doivent appartenir à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui impose $x \geqslant 0$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \arcsin(2x) = \arccos(x) \\ \Leftrightarrow & \sin\arcsin(2x) = \sin\arccos(x) \text{car sin est injectif sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow & 2x = \sin\arccos(x) \\ \Leftrightarrow & 4x^2 = \sin^2\arccos(x) \text{car les deux membres sont positifs} \\ \Leftrightarrow & 4x^2 = 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow & 5x^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \text{car } x \geqslant 0 \end{array}$$

L'unique solution est $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Correction 25 Si $x \in [-1,1]$, on a bien $\dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$, d'après l'exercice **??**. Les deux membres appartiennent à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc on peut appliquer sin. On obtient :

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sin(\arctan x).$$

En écrivant $\sin = \cos.\tan$ et en simplifiant $\tan(\arctan(x)) = x$, l'égalité devient

$$\frac{2x}{1+x^2} = x.\cos\arctan x$$

et comme cos est positif sur cet intervalle et que $\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$, on a :

$$\cos\arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(\arctan x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

L'équation est donc équivalente à $\dfrac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ce qui est équivalent à $x = 0$ ou $2 = \sqrt{1+x^2}$ soit $x = \pm\sqrt{3}$. Les solutions sont donc 0 et $\pm\sqrt{3}$.

Correction 26 Si $x \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, cette équation n'a pas de solution car l'image de arcsin est $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, cette équation n'est définie que si $\tan x \in [-1, 1]$ soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \arcsin\tan(x) = x \\ \Leftrightarrow & \tan(x) = \sin(x) \text{car les deux membres appartiennent à } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sur lequel sin est injectif} \\ & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \\ \Leftrightarrow & \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \text{car } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}$$

L'unique solution est $x = 0$.

Correction 27 On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $\dfrac{1+\sin(x)}{2} \in [0, 1]$ ce qui montre que f est définie sur tout $\mathbb{R}$. La fonction f est 2π-périodique, on va l'étudier sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. On sait que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, f n'est donc pas dérivable lorsque $\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}} = 1$ c'est-à-dire pour $x \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. On sait également que la racine carrée n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas dérivable lorsque $\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}} = 0$ c'est-à-dire pour $x \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. On peut donc dériver la fonction f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

La dérivée de $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}$ est :

$$\frac{\cos(x)}{2}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}} = \frac{\cos(x)}{4\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}}.$$

On en déduit que, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\cos(x)}{4\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}\sqrt{1-\left(\dfrac{1+\sin(x)}{2}\right)}} \\ &= -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}\sqrt{1-\sin(x)}} \\ &= -\frac{\cos(x)}{2|\cos(x)|}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$$

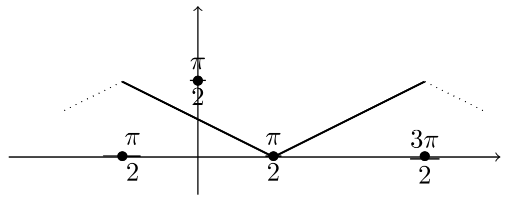
On sait donc qu'il existe deux constantes a et b telles que :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} + a & \text{si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ \dfrac{x}{2} + b & \text{si } x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$$

En calculant $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$, on trouve $a = \dfrac{\pi}{4}$. Par ailleurs, f est continue donc continue en $\dfrac{\pi}{2}$. On a donc $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ d'où l'on déduit $b = -\dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, on a :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} & \text{si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4} & \text{si } x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$$

ce qui permet de tracer f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ puis d'en déduire l'allure de f par 2π-périodicité :



Correction 28 1. Soit $x \geqslant 0$, alors

$$1-x=\frac{1-x^2}{1+x}\leqslant\frac{1}{1+x},$$

et

$$1-x+x^2=\frac{1-(-x)^3}{1-(-x)}=\frac{1+x^3}{1+x}\geqslant\frac{1}{1+x},$$

d'où l'encadrement.

On peut aussi raisonner par équivalence :

$$1-x\leqslant\frac{1}{1+x}\leqslant 1-x+x^3 \Leftrightarrow 1-x^2\leqslant 1\leqslant 1+x^3$$

car $1+x>0$. Le dernier encadrement est vrai donc, par équivalence, on a bien l'encadrement souhaité.

On peut aussi faire deux études de fonctions: $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}-1+x$ dont la dérivée vaut

$$\forall x\geqslant 0, g'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+1=\frac{(1+x)^2-1}{(1+x)^2}\geqslant 0$$

et $g(0)=0$ donc $g(x)\geqslant 0 \forall x\geqslant 0$.

On pose $f : x\mapsto g(x)-x^2$. Pour tout $x\geqslant 0$, on a

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+1-2x=\frac{(1-2x)(1+x)^2-1}{(1+x)^2}=\frac{-2x^3-3x^2}{(1+x)^2}\leqslant 0$$

et $f(0)=0$ donc $f(x)\leqslant 0, \forall x\geqslant 0$.

On a donc bien l'encadrement souhaité.

2. Le résultat précédent est vrai pour tout $x>0$, il est donc vrai pour $x^2>0$. Soit $x>0$. Pour tout $t\in[0,x]$, on a

$$1-t^2\leqslant\frac{1}{1+t^2}\leqslant 1-t^2+t^4,$$

donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^x 1-t^2\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x 1-t^2+t^4\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$x-\frac{x^3}{3}\leqslant\arctan(x)\leqslant x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$$

3. On a

$$0\leqslant\arctan(x)-x+\frac{x^3}{3}\leqslant\frac{x^5}{5}$$

donc

$$0\leqslant\frac{\arctan(x)-x+\frac{x^3}{3}}{x^3}\leqslant\frac{x^2}{5}.$$

Par le théorème d'encadrement, on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-x+\frac{x^3}{3}}{x^3}=0,$$

donc on a bien $\arctan(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$.

Correction 29 On commence par déterminer la limite de ce qu'il y a dans la parenthèse en calculant un équivalent du numérateur et du dénominateur. On écrit $x^2e^x-\ln(1+x\sqrt{x})=x^2+o(x^2)-x\sqrt{x}+o(x\sqrt{x})=-x\sqrt{x}+o(x\sqrt{x})$ donc $x^2e^x-\ln(1+x\sqrt{x})\sim -x\sqrt{x}$, puis $\sqrt{1+x}-\cos(x)=1+\dfrac{x}{2}+o(x)-1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)=\dfrac{x}{2}+o(x)$, on a donc $\sqrt{1+x}-\cos(x)\sim\dfrac{x}{2}$. On en déduit que

$$\frac{x^2e^x-\ln(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}-\cos x}\sim 2\sqrt{x},$$

donc la limite est nulle. Ainsi, on peut écrire :

$$\tan\left(\frac{x^2e^x-\ln(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}-\cos x}\right)\sim\frac{x^2e^x-\ln(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}-\cos x},$$

puis

$$\tan\left(\frac{x^2e^x-\ln(1+x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}-\cos x}\right)\sim 2\sqrt{x}.$$

Correction 30 La racine carrée est définie pour $x^2-1\geqslant 0$ c'est-à-dire $|x|\geqslant 1$. Pour $x\leqslant -1$, on a $x=-\sqrt{x^2}$ donc $x+\sqrt{x^2-1}<0$ et le ln n'est pas défini. Pour $x\geqslant 1$, on a $x+\sqrt{x^2-1}\geqslant 1$ donc le logarithme est bien défini. On écrit :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ch}(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\\
=\ & \frac{1}{2}\left(e^{x+\sqrt{x^2-1}}+e^{-x-\sqrt{x^2-1}}\right)\\
=\ & \frac{1}{2}\left(e^{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{e^{x+\sqrt{x^2-1}}}\right)\\
=\ & \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\\
=\ & \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}+\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x^2-(x^2-1)}\right) \text{ en multipliant par la quantité conjuguée}\\
=\ & \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}+x-\sqrt{x^2-1}\right)\\
=\ & x
\end{aligned}
$$

On en déduit que pour tout $x \geqslant 1$, $\mathrm{ch}\left((\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right) = x$

Correction 31 On raisonne par équivalence :

$$\mathrm{ch}(x) = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0.$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 en e^x dont le discriminant vaut 12. Il possèdent deux racines positives $2 \pm \sqrt{3}$, les solutions sont donc $\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$.

Correction 32 On raisonne par équivalence :

$$
\begin{aligned}
3\mathrm{ch}(x) + 2\mathrm{sh}(x) = 3 \quad & \Leftrightarrow 3(e^x + e^{-x}) + 2(e^x - e^{-x})\\
& \Leftrightarrow 5e^x + e^{-x} - 6 = 0\\
& \Leftrightarrow 5e^{2x} - 6e^x + 1 = 0
\end{aligned}
$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 en e^x dont le discriminant vaut 16. Il y a deux racines : 1 et $\dfrac{1}{5}$ donc les solutions sont $x = 0$ et $x = -\ln(5)$.

Correction 33 On sait que $\sqrt{1+x^2} \geqslant |x|$ donc $\sqrt{1+x^2} \geqslant x$ et $\sqrt{1+x^2} \geqslant -x$. Les expressions sont donc définies pour tout $\mathbb{R}$. On remarque ensuite, grâce à la quantité conjuguée, que

$$x + \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}$$

d'où l'égalité en appliquant ln.

Remarque. *On peut aussi écrire directement :*

$$
\begin{aligned}
\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2}-x) \quad & = \ln\left((x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)\right)\\
& = \ln\left((\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x^2 = \ln(1) = 0.
\end{aligned}
$$

Correction 34 Elle est définie sur tout $\mathbb{R}$ car ch ne s'annule pas. De plus, elle est impaire en tant que quotient d'une fonction impaire et d'une fonction paire. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tanh'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque. *On a également,* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$.

Pour le calcul des limites, on écrit :

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

on a alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1$ puis, par imparité de la fonction, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \tanh(x) = -1$.

Correction 35 On a

- $\sin(x) = x + o(x^2)$ et $\mathrm{sh}(x) = x + o(x^2)$ donc $\sin(x) - \mathrm{sh}(x) = o(x^2)$.
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc $\cos(x) - \mathrm{ch}(x) = -x^2 + o(x^3)$.

Ainsi,

$$\frac{\sin(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)} = \frac{o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = \frac{o(x^2)/x^2}{1 + o(x^2)/x^2},$$

avec $\dfrac{o(x^2)}{x^2} \to 0$ donc la limite est nulle.

Correction 36 On pose $x = 1 - h$ avec $h \to 0^+$. On a $1 + x = 2 - h$ et $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{h}$. On a $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\dfrac{2-h}{h}\right) = \ln(2-h) - \ln(h) \sim -\ln(h)$ car $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} -\ln(h) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \ln(2-h) = \ln(2)$.

On a également $1 - x^2 = h(2-h) \sim 2h$ lorsque h tend vers 0. On en déduit que $\dfrac{h(2-h)}{1-h} \ln\left(\dfrac{2-h}{h}\right) \sim -2h\ln(h)$.. Par croissances comparées, cette limite est nulle lorsque h tend vers 0. On en déduit que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{h(2-h)}{1-h} \ln\left(\frac{2-h}{h}\right) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0$.

Correction 37 On a $\sin(x) = x + o(x)^2$ donc $\sin^2(x) = x^2 + 2xo(x^2) + o(x^2)^2 = x^2+o(x^3)+o(x^4) = x^2+o(x^3)$ et $\ln(1+x^2) = x^2+o(x^2)$ donc $\ln(1+x^2)-\sin^2(x) = o(x^2)$. On a $e^x - \cos(x) = 1 + x + o(x) - 1 + o(x) = x + o(x)$ donc $e^x - \cos(x) \sim x$.

On en déduit que

$$\frac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{e^x - \cos(x)} = \frac{o(x^2)}{x + o(x)} = \frac{o(x^2)/x}{1 + o(1)} \to 0$$

Correction 38 On sait que $\sin(x) \to 0$ donc $e^{\sin(x)} - 1 \sim \sin(x)$ puis $e^{\sin(x)} - 1 \sim x$ et enfin

$$\left(e^{\sin(x)} - 1\right)^2 \sim x^2$$

On a donc

$$\left(e^{\sin(x)} - 1\right)^2 = x^2 + o(x^2).$$

De même, $\sin(x) \to 0$ donc $2\tan(\sin^2(x)) \to 0$, on a donc

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + 2\tan(\sin^2(x))\right) &\sim 2\tan(\sin^2(x)) \\ &\sim 2\sin^2 x \text{ car } \tan(y) \sim_{y\to 0} y \\ &\sim 2x^2 \text{ car } \sin x \sim_{x\to 0} 2x^2 \text{ donc } \sin^2(x) \sim x^2\end{aligned}$$

On a donc $\ln\left(1 + \tan(\sin^2(x))\right) \sim 2x^2$ d'où

$$\ln\left(1 + 2\tan(\sin^2(x))\right) = 2x^2 + o(x^2)$$

Correction 39 Elle est bien définie et dérivable et sa dérivée vaut :

$$f'(x) = \left(-\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right)\exp\left(-x\ln(x+1)\right) = -\left(\frac{(x+1)\ln(x+1) + x}{(1+x)^{x+1}}\right).$$

La fonction est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Il n'y a pas de forme indéterminée pour les limites, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
f	1 ↘	0

Correction 40 On écrit :

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x = x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) = x\left(1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) = \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x = \frac{1}{3}.$$

Correction 41 Par le théorème de croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}} = 0$.

Correction 42 Par le théorème de croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^3 \ln x = 0$.

Correction 43 On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^2} = 0$.

Remarque. *À nouveau ici, pas de forme indéterminée.*

Correction 44 On remarque que $\frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$ donc $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}&\arcsin(x) = \arcsin\tfrac{4}{5} + \arcsin\tfrac{5}{13} \\ \Leftrightarrow\ & x = \sin\left(\arcsin\tfrac{4}{5} + \arcsin\tfrac{5}{13}\right) \text{ car les deux membres appartiennent à } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{4}{5}\cos\arcsin\frac{5}{13} + \frac{5}{13}\cos\arcsin\frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{4}{5}\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{5}{13}\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \text{ car } \cos\arcsin \geqslant 0 \text{ donc } \cos = \sqrt{1 - \sin^2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{63}{65}\end{aligned}$$

L'unique solution est $x = \dfrac{63}{65}$.

Correction 45 On écrit :

$$\begin{aligned}&\tan\arcsin(x) \\ =\ & \frac{\sin\arcsin(x)}{\cos\arcsin(x)} \\ =\ & \frac{x}{\sqrt{\cos^2\arcsin(x)}} \text{ car arcsin appartient à } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sur lequel cos est positif} \\ =\ & \frac{x}{\sqrt{1 - \sin^2\arcsin(x)}} \\ =\ & \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

On a donc, $\forall x \in]-1, 1[$, $\tan\arcsin(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Correction 46 On commence par regarder pour quelles valeurs de x cette équation est définie. arcsin étant définie sur $[-1, 1]$, on doit avoir $x, 2x$ et $\sqrt{3}x$ dans cet intervalle, ce qui impose $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a alors $\arcsin(x\sqrt{3}) \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ et $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ donc $\arcsin(x\sqrt{3}) + \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Le sinus étant injectif sur ce segment, l'égalité est équivalente à :

$$\sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arcsin(x\sqrt{3}) + \arcsin(x))$$

ou encore à :

$$2x = x\cos\arcsin x\sqrt{3} + x\sqrt{3}\cos\arcsin x.$$

On a donc $x = 0$ solution évidente. On simplifie les cosinus qui sont positifs et donc égaux à $\sqrt{1-\sin^2}$ et on trouve :

$$2 = \sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}.$$

Ensuite on procède par équivalence:

$$\begin{aligned}
&2 = \sqrt{1-3x^2} + \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow 4 = (1-3x^2) + 3(1-x^2) + 2\sqrt{3(1-3x^2)(1-x^2)}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 = \sqrt{(1-3x^2)(1-x^2)}\\
&\Leftrightarrow 3x^4 = 1 - 4x^2 + 3x^4\\
&\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Les solutions trouvées appartiennent bien à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ donc les solutions sont $0, \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

Correction 47 On a $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. L'équation est équivalente à $\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) = \arcsin(x)$. Le membre de gauche étant positif, puisque $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $\arcsin(x) > 0$ donc $x > 0$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arcsin\frac{5}{13}\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{5}{13} \text{car les deux membres appartiennent à } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sur lequel sin est injectif}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\arcsin(x) = \frac{5}{13}\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{\cos^2\arcsin(x)} = \frac{5}{13} \text{car } \cos\arcsin \geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{1-x^2} = \frac{5}{13}\\
\Leftrightarrow\ &1 - x^2 = \frac{25}{169}\\
\Leftrightarrow\ &x^2 = \frac{144}{169}\\
\Leftrightarrow\ &x = \frac{12}{13} \text{car } x > 0
\end{aligned}$$

L'unique solution est donc $\frac{12}{13}$.

Correction 48 Il faut $x \neq 0$, $\frac{1-x}{x} \geqslant 0$ et $2x - 1 \in [-1, 1]$ ce qui impose $x \in]0, 1]$. Comme $\sqrt{\frac{1-x}{x}} \geqslant 0$, on a $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \in [0, \pi]$.

On suppose donc $x \in]0, 1]$ et on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
&2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \arcsin(2x-1)\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) = 2x - 1\\
&\text{car les deux membres appartiennent à } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ sur lequel sin est injectif}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) = 2x - 1\\
\Leftrightarrow\ &2\cos^2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) - 1 = 2x - 1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2} = 2x \text{car } \cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2x}{x + 1 - x} = 2x\\
\Leftrightarrow\ &x = x
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie, on a montré, par équivalence, que l'équation est vraie pour tout $x \in]0, 1]$.

Remarque. *On a d'abord réécrit l'équation de façon à ce que chaque membre appartienne à* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Correction 49 On pose $g : x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$. Elle est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ avec, $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2\sqrt{1-x^2} - \frac{4x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\\
&= \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
g	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On en déduit que $\forall x \in [-1,1]$, $g(x) \in [-1,1]$ ce qui montre que f est bien définie sur $[-1,1]$. Elle est dérivable lorsque $1-x^2 \neq 0$ et $2x\sqrt{1-x^2} \neq \pm 1$ donc sur $]-1,1[\setminus\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2\left(1-x^2\right)}}.$$

On a $1-4x^2\left(1-x^2\right) = 4x^4-4x^2+1 = (1-2x^2)^2$. On obtient donc

$$f'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\,|1-2x^2|} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 1-2x^2 \geqslant 0 \\ -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left]-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[\end{cases}$$

ça n'est demandé (pourquoi????) mais on pourrait évidemment ne pas s'arrêter là et déterminer une expression simplifiée de f.

On remarque tout d'abord que f et $2\arcsin$ ont des dérivées égales sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, les deux fonctions sont donc égales à constante près. On a $f(0) = 0 = 2\arcsin(0)$ donc

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[, f(x) = 2\arcsin(x).$$

Par ailleurs, f et $-2\arcsin$ ont même dérivée sur les intervalles $\left]-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$, il existe donc deux constantes c_1 et c_2 tel que

$$f(x) = \begin{cases} -2\arcsin(x)+c_1 & \text{si } x \in \left]-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ -2\arcsin(x)+c_2 & \text{si } x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[\end{cases}$$

On évalue f en $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on $\frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient

- $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin\left(-\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{4}}\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ et $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+c_1 = \frac{2\pi}{3}+c_1$. On en déduit que $c_1 = -\pi$.
- $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+c_2 = -\frac{2\pi}{3}+c_2$. On en déduit que $c_2 = \pi$.

Ainsi, on a

$$f(x) = \begin{cases} -2\arcsin(x)-\pi & \text{si } x \in \left]-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ 2\arcsin(x) & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ -2\arcsin(x)+\pi & \text{si } x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[\end{cases}$$

En $x=1$, on a $f(1) = \arcsin(0) = 0$ et $-2\arcsin(1)+\pi = -2\times\frac{\pi}{2}+\pi = 0$
En $x=-1$, on a $f(-1) = \arcsin(0) = 0$ et $-2\arcsin(-1)-\pi = -2\times(-\frac{\pi}{2})-\pi = 0$.
Enfin, en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a bien

$$-2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi = -2\times\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{\pi}{2} = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

et de même en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (heureusement vu que f est continue !!!).

On obtient donc

$$f(x) = \begin{cases} -2\arcsin(x)-\pi & \text{si } x \in \left[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\\ 2\arcsin(x) & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ -2\arcsin(x)+\pi & \text{si } x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right] \end{cases}$$

Correction 50 1. La fonction est définie sur $]-1,1[$ et dérivable sur son domaine de définition. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $f'(x) = \arcsin'(x)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \arcsin(x) + \alpha$. Comme $f(0) = 0 = \arcsin(0)$, on en déduit que $\alpha = 0$ donc $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \arcsin(x)$.

3. Soit $x \in]-1,1[$, alors il existe $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \sin(u)$. On a alors $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos(u)$ car cos est positif sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sin(u)}{\cos(u)} = \tan(u) = \tan\arcsin(x)$.

   On a donc $\tan(f(x)) = \tan(\arcsin(x))$ ce qui implique, par injectivité de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \arcsin(x)$.

   Remarque. *On peut aussi montrer que l'égalité $f(x) = \arcsin(x)$ est équivalente, en appliquant* tan, *à* $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ *ce qui est toujours vrai, et conclure mais cela suppose que l'on connaît l'expression de f.*

Correction 51 On a $\cos(x) - 1 \to 0$ donc $\sin(\cos(x)-1) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1$ et $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ d'où $\sin(\cos(x)-1) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

On sait, de plus, que $\sqrt{1+x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. On en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos(x)-1)}{\sqrt{1+x^2}-1} = -1.$$

Correction 52 On a $\sqrt{1+x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $\ln(1+\sin^2(x)) \underset{0}{\sim} \sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^2$. On en déduit que $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+\sin^2(x))} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$, donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+\sin^2(x))} = \frac{1}{2}.$$

Correction 53 On a :

$$\begin{array}{rl} & 2\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) = 5 \\ \Leftrightarrow & 2e^x - 2e^{-x} + e^x + e^{-x} = 6 \\ \Leftrightarrow & 3e^{2x} - 6e^x - 1 = 0 \text{en multipliant par } e^x \end{array}$$

On reconnaît alors un polynôme de degré 2 en e^x dont le discriminant vaut 48. Les racines de $3X^2 - 6X - 1$ sont $\dfrac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$. L'exponentielle étant toujours strictement positive, l'unique solution est $e^x = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$ d'où $x = \ln\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Correction 54 1. On sait que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ donc :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ch}^2(x) - 1 - \mathrm{ch}(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{ch}(x) - 2 = 0.$$

On pose $X = \mathrm{ch}(x)$, alors :

$$X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow (X+1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = 2$$

Comme $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$, on ne peut avoir $\mathrm{ch}(x) = -1$, donc :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ch}(x) = 2.$$

Il suffit donc de résoudre $\mathrm{ch}(x) = 2$. On a :

$$\mathrm{ch}(x) = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0.$$

On pose $Y = e^x$, alors $Y^2 - 4Y + 1 = 0$ a pour racine $Y = 2 \pm \sqrt{3}$, ce qui implique $x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$. Les solutions de $g(x) = 0$ sont donc $\ln(2 \pm \sqrt{3})$

2. La fonction g est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$g'(x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{sh}(x)(2\mathrm{ch}(x) - 1).$$

Comme $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$2\mathrm{ch}(x) - 1 \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

et le signe de $g'(x)$ dépend donc du signe de $\mathrm{sh}(x)$. Ainsi,

$$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

On a le tableau de variations suivant :

	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a $g(0) = -2 \leqslant 0$ donc -2 répond à la question.

Correction 55 On pose $f : x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)} - 1 - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \mathrm{ch}(x)e^{\mathrm{sh}(x)} - 1.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$ donc $e^{\mathrm{sh}(x)} \geqslant 1$ et comme on a également : $\forall x \geqslant 0, \mathrm{ch}(x) \geqslant 1$, on en déduit que $\forall x \geqslant 0, f'(x) \geqslant 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a $f(0) = 0$, on peut donc affirmer, comme $f(0) = 0$, que :

$$\forall x > 0, f(x) > 0,$$

ce qui montre l'inégalité souhaitée.

Correction 56 On remarque que $\lim\limits_{x \to 0} \sin(\sqrt{1+2x} - 1) = 0$ donc

$$\ln\left(\sin(\sqrt{1+2x} - 1)\right) \sim \sin(\sqrt{1+2x} - 1).$$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1+2x} - 1 = 0$ donc

$$\sin\left(\sqrt{1+2x} - 1\right) \sim \sqrt{1+2x} - 1.$$

Enfin, $\sqrt{1+2x} - 1 \sim x$. Ainsi, un équivalent de $\ln\left(1 + \sin(\sqrt{1+2x} - 1)\right)$ en 0 est x.

Correction 57 On commence par regarder ce qu'il y a dans le ln. On a

$$\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1+x+o(x)) = 1 + 2x + o(x).$$

On en déduit que $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \sim 2x$. On peut aussi, si on préfère, écrire

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = o + o(x) - (-x + o(x)) = 2x + o(x).$$

On a $1 - x^2 \sim 1$ donc

$$\frac{1-x^2}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \sim \frac{2x}{x} = 2.$$

La limite cherchée est donc 2.

Correction 58 On écrit $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

On sait que $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} x - \dfrac{\pi}{3}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{(3x - \pi)\cos x} &\underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} \frac{2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{(3x-\pi)\cos(x)} \\ &\underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} \frac{2}{3\cos(x)} \end{aligned}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos(x) = \dfrac{1}{2}$ d'où $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} = \dfrac{4}{3}$. On a donc $\dfrac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{(3x - \pi)\cos x} \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} \dfrac{4}{3}$.

Correction 59 Pour tout $x > 0$, on écrit $\ln(x)\displaystyle\int_x^{x+1} e^t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+1} e^t \ln(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \ln(x+1)\int_x^{x+1} e^t \,\mathrm{d}t$, d'où, en calculant les intégrales :

$$\ln(x)(e^{x+1} - e^x) \leqslant \int_x^{x+1} e^t \ln(t) \,\mathrm{d}t \leqslant \ln(x+1)(e^{x+1} - e^x).$$

Comme $\ln(x+1) \sim \ln(x)$, on en déduit l'équivalent souhaité.

Correction 60 On note $\alpha = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$. Les réels $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ et $\frac{1}{8}$ sont tous inférieurs à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc, par croissance de arctan, $\arctan\frac{1}{2} < \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ et de même pour $\arctan\frac{1}{5}$ et $\arctan\frac{1}{8}$. On a donc :

$$\alpha < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

et $\alpha > 0$. Comme tan est injective sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} & \alpha = \arctan\tfrac{1}{2} + \arctan\tfrac{1}{5} + \arctan\tfrac{1}{8} \\ \Leftrightarrow\quad & \tan\alpha = \tan\left(\arctan\tfrac{1}{2} + \arctan\tfrac{1}{5} + \arctan\tfrac{1}{8}\right). \end{aligned}$$

On sait que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$. Donc :

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{2} + \tan(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8})}{1 - \frac{1}{2}\tan(\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8})}.$$

Or $\tan(\arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}) = \dfrac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}$. On a donc $\tan\alpha = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1$.

Comme $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Correction 61 1. Soit $x \in]-1, 1[$. On raisonne par équivalence.

On a $x \in]-1, 1[$ donc $\arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ d'où $2\arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Par définition de la fonction arctan, on a $\arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que les deux membres de l'égalité à montrer appartiennent à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur lequel tan est injectif. On a donc :

$$\begin{aligned}
& 2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \tan\left(2\arctan(x)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right) \text{ car } tan \text{ est injective sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\
\Leftrightarrow\ & \tan(2\arctan(x)) = \frac{2x}{1-x^2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2\tan\arctan(x)}{1-\tan^2\arctan(x)} = \frac{2x}{1-x^2} \text{ car } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie pour tout $x \in]-1,1[$. Par équivalence, on en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

2. On pose $f(x) = 2\arctan x$ et $g(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$. Les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ donc sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

et

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{2}{1+x^2}
\end{aligned}$$

.

On a donc $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = g'(x)$, il existe donc $K_1 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = g(x) + K_1$. Pour $x = 0$, on a $f(0) = g(0) = 0$ donc $K_1 = 0$ et les deux fonctions sont égales.

3. On reprend le calcul fait à la question précédente. La fonction $f - g$ est de dérivée nulle, elle est donc constante sur chaque intervalle où elle est dérivable. Il existe donc deux constantes K_1 et K_2 telles que :

$$\forall x \in]-\infty, -1[, f(x) = g(x) + K_1,$$

et

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = g(x) + K_2.$$

Pour déterminer K_2, on peut prendre $x = \sqrt{3}$. On obtient $\frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + K_2$ d'où $K_2 = \pi$. On peut aussi faire tendre x vers $+\infty$ ce qui implique $K_2 = \pi$.

Pour déterminer K_1, on peut utiliser l'imparité des deux fonctions et en déduire que $K_1 = -K_2$. On a montré que :

$$\begin{cases}
2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - \pi & \text{si } x < -1 \\
2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) & \text{si } x \in]-1,1[\\
2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \pi & \text{si } x > 1
\end{cases}$$

Correction 62 La fonction est 2π-périodique. D'après l'exercice 19, on a :

- Si $x \in [-\pi, 0]$, alors $\arccos\cos(x) = -x$.
- Si $x \in [0, \pi]$, alors $\arccos\cos(x) = x$.
- Si $x \in [\pi, 2\pi]$, alors $\arccos\cos(x) = 2\pi - x$.

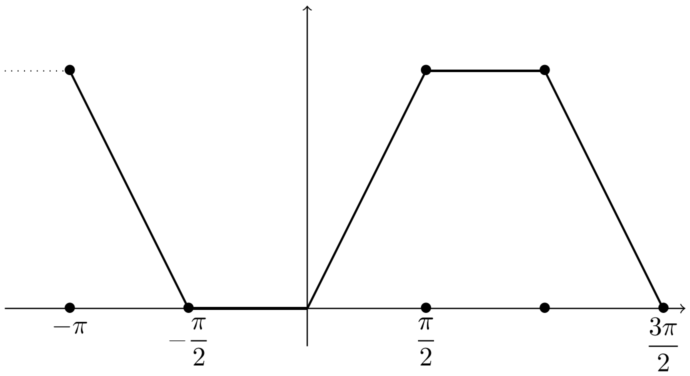
D'après l'exercice 19, on a :

$$\arcsin\sin(x) = \begin{cases}
-\pi - x & \text{si } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \\
x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
\pi - x & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]
\end{cases}$$

On en déduit que :

$$f(x) = \begin{cases}
-\pi - 2x & \text{si } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \\
0 & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\
\pi - x & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\
\pi & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]
\end{cases}$$

On complète par 2π-périodicité de la fonction :



Correction 63 On sait que $\mathrm{ch}(x) \geqslant \mathrm{ch}(0)$ par parité de la fonction ch donc l'équation n'a pas de solution pour $a < 1$. Si $a \geqslant 1$, on passe à l'expression exponentielle et on cherche à résoudre $e^x + e^{-x} = 2a$ ou encore $e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0$. On calcule le discriminant de ce polynôme de degré 2 en e^x, on trouve $4(a^2 - 1)$. Il est positif ou nul, les racines de ce polynôme sont donc $\dfrac{2a \pm 2\sqrt{a^2-1}}{2} = a \pm \sqrt{a^2-1}$. On en déduit que l'équation $\mathrm{ch}(x) = a$ admet comme solutions $\ln\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right)$ (et cette solution est unique si $a = 1$).

Correction 64 On raisonne par équivalence :

$$\mathrm{sh}(x) = a \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2a \Leftrightarrow e^{2x} - 2ae^x - 1 = 0.$$

Le polynôme de degré 2 en e^x a pour discriminant $4a^2 + 4$. Il est strictement positif donc le polynôme a deux racines distinctes : $\dfrac{2a \pm 2\sqrt{a^2+1}}{1} = a \pm \sqrt{a^2+1}$. Comme $a - \sqrt{a^2+1} < 0$, on ne peut avoir $e^x = a - \sqrt{a^2+1}$ donc l'unique solution de l'équation est $\ln\left(a + \sqrt{a^2+1}\right)$.

Remarque. *L'application* $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ *est l'expression de la bijection réciproque de sh.*

Correction 65 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = a\mathrm{ch}(x) &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = a(e^x + e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow (1-a)e^x = (1+a)e^{-x} \\ &\Leftrightarrow (1-a)e^{2x} = 1 + a. \end{aligned}$$

Si $a = 1$, il n'y a pas de solution. Si $a \neq 1$, on doit résoudre $e^{2x} = \dfrac{1+a}{1-a}$. Il faut que $\dfrac{1+a}{1-a}$ soit strictement positif, ce qui est équivalent à $(1+a)(1-a) > 0$, on doit donc avoir $a \in]-1, 1[$. Si $a \in]-1, 1[$, on a $2x = \ln\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)$ d'où $x = \ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$.