Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2024-2025
Feuille 7

TD 7: Primitives et ED.

1 calcul de primitives "usuelles" et changement de variable

Exercice 1.
Calculer $\int^t \mathrm{ch}x\mathrm{sh}^3 x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2.
Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 3.
Calculer $\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.
Calculer $\int^x \cos t \sin t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5.
Calculer $\int^t \sin^2(t)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.
Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7.
Calculer $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{e^t+1}$.

Exercice 8.
Calculer $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$.

2 Calcul de primitives par intégration par parties

Exercice 9.
Calculer $\int^x (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10.
Calculer $\int^t (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$

3 Récurrence et intégration par parties

Exercice 11.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e (\ln(x))^n\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n e^t\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
3. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
4. En déduire la limite de $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$

4 Primitive de fractions rationnelles

Exercice 12.
Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$.

Exercice 13.
Calculer $\int \frac{t+1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 14.
Calculer $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t}$.

Exercice 15.
Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$.

5 Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 16.
Résoudre $y' + \frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}y = \frac{e^x+2}{e^x-1}$.

Exercice 17.
Résoudre $y' - xy = xe^{x^2}$

Exercice 18.
Résoudre $y' - y\frac{1}{\tan x} = \sin(x)$

Exercice 19.
Résoudre $(x^2+1)y' + (x-1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$.

Exercice 20.
Résoudre $y' + \tan(x)y + \cos^2(x) = 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 21.
Soit $(x^2+1)y' - 3xy = 1$

1. Trouver une solution polynômiale.
2. En déduire l'ensemble des solutions.

6 Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 22.
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes

$$y" - 3y' + 2y = g_i(x),\ i = 1\ldots 4 \text{ avec}$$

1. $g_1(x) = 1$
2. $g_2(x) = (x-1)e^{-x}$
3. $g_3(x) = (x+1)e^{2x}$
4. $g_4(x) = \sin(x)$

Exercice 23.
Résoudre $y" + ay = 0$.

Exercice 24.
Résoudre $y" + y' - 2y = 2\sin x$.

7 Équations différentielles avec changement de variable

Exercice 25.
Résoudre $(1+x^2)^2y" + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en effectuant le changement de variable $t = \arctan x$ (c'est-à-dire en posant $z(t) = y(\tan(t))$. On donnera les solutions sous forme de fractions rationnelles.

Exercice 26.
On cherche à résoudre $x^2y"(x) + 3xy'(x) + y(x) = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène en effectuant le changement de variable $t = \ln x$ (c'est-à-dire en posant $z(t) = y(e^t)$).
2. En déduire l'ensemble des solutions.

Exercice 27.
Soit (E) l'équation différentielle

$$ax^2y" + bxy' + cy = 0$$

avec a, b, c réels. En posant $z(t) = y(e^t)$, montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera. En déduire la forme des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Résoudre ensuite l'équation $x^2y" - xy' + y = 0$.

8 Équations fonctionnelles

Exercice 28.
Déterminer toutes les fonctions dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)f'(x) = 1$.

Exercice 29.
Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1+m^2)y = (1+4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparément les cas $m = 0$ et $m \neq 0$).

Exercice 30.

1. Résoudre $x^2y" + y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le changement de variable $z(t) = y(e^t)$.
2. Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant : $f'(x) = f(\frac{1}{x}), \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$.

9 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 31.
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Exercice 32.
Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

Exercice 33.
Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \,\mathrm{d}t$.

Exercice 34.
Calculer $\displaystyle\int^t \sin^3 x \cos x \,\mathrm{d}x$.

Exercice 35.
Calculer $\displaystyle\int^t \frac{\cos^3 x \,\mathrm{d}x}{\sin^5 x}$

Exercice 36.
Calculer $\displaystyle\int^t \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x$.

Exercice 37.
Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(t) \,\mathrm{d}t$.

Exercice 38.
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{t+2} \,\mathrm{d}t$

Exercice 39.
Calculer $\displaystyle\int^x \frac{t}{1+2t} \,\mathrm{d}t$.

Exercice 40.
Calculer $\displaystyle\int^t \frac{1+e^x \,\mathrm{d}x}{1-e^x}$.

Exercice 41.
Calculer $\displaystyle\int^x t \arctan t \,\mathrm{d}t$.

Exercice 42.
$\displaystyle\int_0^1 \arctan t \,\mathrm{d}t$.

Exercice 43.
Calculer $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$.

Exercice 44.
Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t-3}$.

Exercice 45.
Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4t+4}$.

Exercice 46.
Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}$

Exercice 47.
Résoudre $x'(t) - x(t) = t^2$

Exercice 48.
Résoudre $(x^2+1)y' + 3xy = 0$

Exercice 49.
Résoudre $y' + \dfrac{(x+1)}{x(x-1)}y = \dfrac{x}{(x-1)}$

Exercice 50.
Résoudre $y' - \dfrac{2}{x}y = x^3$.

Exercice 51.
Résoudre $y' = \dfrac{1}{x(1+x^2)}y$.

Exercice 52.
Résoudre $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\cos x}{x}$

Exercice 53.
Résoudre $y' - \tan x y = \dfrac{1}{\cos x}$ sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, avec $y(0) = 1$.

Exercice 54.
Trouver les solutions de $y" + y' + y = g(x)$ dans le cas où :

1. $g(x) = 1$
2. $g(x) = xe^{-2x}$
3. $g(x) = x^2 + 3x + 4$
4. $g(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Exercice 55.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y" + 2y' + 5y = 5x$.

Exercice 56.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $-3y" - 2y' + y = \cos(x)$.

Exercice 57.
Résoudre $y" + 2y' - 3y = x^2$.

Exercice 58.
Résoudre $y" - 3y' + 2y = \sin x + \cos x$.

Exercice 59.
Résoudre $y" + y' = 2xe^x$.

Exercice 60.

1. Résoudre l'équation $x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(t) = y(e^t)$.
2. Trouver une solution polynômiale de $x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 3x^2 + 4x + 1$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de $x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 3x^2 + 4x + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 61.
On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)\, \mathrm{d}x$$

1. Établir une relation de récurrence.
2. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

Exercice 62.
On considère deux entiers naturels p et q et on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\, \mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I(p,q)$ et $I(p+1, q-1)$ lorsque $q \geqslant 1$.
2. En déduire une expression de $I(p,q)$ en fonction de $p!$, $q!$ et $(p+q+1)!$.

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{p+k+1}\binom{q}{k}$$

Exercice 63.
Résoudre l'équation $y' + \dfrac{2}{x(x^2-1)}y = \dfrac{x}{x^2-1}$.

Exercice 64.
Résoudre l'équation différentielle $x^2y" + 3xy' + 4y = 7x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ en posant $z(t) = y(e^t)$.

Exercice 65.
Résoudre $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ en cherchant une solution particulière y_p sous la forme $x \mapsto ax$ et en posant le changement de fonction $y = y_p - \dfrac{1}{z}$.

Exercice 66.
On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = \sqrt{y}$. Soit y une solution différente de la fonction nulle.

1. Montrer que y ne peut être strictement positive.
2. Montrer que si $y(a) = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \leqslant a, y(x) = 0$.
3. En déduire que l'ensemble des points d'annulation de y est majoré.
4. En déduire la forme de y.

Exercice 67.
Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x et y réels on ait

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Memo

- Comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1?
  Résoudre l'équation homogène puis trouver une solution particulière.
- Comment chercher une solution particulière?
  - Essayer des solutions "évidentes" (constante, identité...)
  - Chercher une solution particulière sous la même forme que le second membre (cf méthode 1)
  - Utiliser la méthode de la variation de la constante : n'oubliez pas de multiplier $\lambda(x)$ par la solution homogène une fois que vous avez déterminé $\lambda(x)$!!
- Comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 ?
  Appliquer le cours: si, si, tout est dedans ;-)
- Comment résoudre une équation quelconque?
  - Chercher les solutions polynômiales: cela sera alors précisé dans l'énoncé.
  - Changer de fonction. Le changement de variable sera donné.
- Comment trouver des fonctions satisfaisant une équation fonctionnelle?
  Se ramener à une équation différentielle, la résoudre et ne pas oublier de vérifier, parmi les solutions de l'équation différentielle, celles qui sont effectivement solution de l'équation fonctionnelle.

Indications

8 Faire un changement de variable $u = \ln t$.

21 1. Chercher une solution sous la forme d'un polynôme de degré 3.

2. Procéder par la méthode de la variation de la constante.

23 Il faudra distinguer selon le signe de a.

44 Scinder en deux fractions

45 Remarquer que le dénominateur est un carré.

54 1. On ne peut pas faire plus évident !

2. Chercher une solution sous la forme $x \mapsto (ax+b)e^{-2x}$.

3. Chercher une solution sous la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

4. Passer par les complexes pour que le second membre soit une exponentielle dont l'exposant est racine simple de l'équation caractéristique.

58 Écrire le second membre comme la partie réelle d'une exponentielle complexe.

63 Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

67 Dériver deux fois par rapport à y puis évaluer en $y = 0$ pour faire apparaître une équation différentielle.