Nombres complexes

1 Rappels.

1.1 Conjugué et module

Définition 1. Un nombre complexe est un nombre qui s'écrit sous la forme $z = a + i\,b$ où a et b sont des réels (forme algébrique du nombre complexe), a s'appelle la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z. On les note : $a = \mathcal{R}e\,(z)\,,\ b = \mathcal{I}m\,(z)\,.$

Notations: On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Définition 2. Si $z = ib$ avec b réel, on dit que z est un imaginaire pur.

Définition 3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit le conjugué de z, noté $\overline{z}$ par : $\overline{z} = a - i\,b$.

L'application qui à z associe son conjugué est bijective et sa bijection réciproque est elle-même ($\overline{\overline{z}} = z$).

Proposition 1. $\forall\ (u, v) \in \mathbb{C}^2$,

- $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$
- $\overline{u.v} = \overline{u}.\overline{v}$,
- $\overline{\left(\dfrac{u}{v}\right)} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{v}}$ *si* $v \neq 0$.

Proposition 2. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *On a :*

$$\mathcal{R}e\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \mathcal{I}m\,(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\,i}.$$

Définition 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle module de z, noté $|z|$, le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z.\overline{z}}$.

Rappel: Si A et B sont d'affixes respectives z_A et z_B, $|z_B - z_A|$ est égal à la longueur AB.
Notations: On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Cela correspond au cercle trigonométrique.

Proposition 3. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *et* $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

- $|\,z\,|^2 = z.\overline{z}$ *et* $|\overline{z}| = |z|$.
- $\forall\,(u, v) \in \mathbb{C}^2$,$|uv| = |u|.|v|$
- *Si* $v \neq 0$, $\left|\dfrac{u}{v}\right| = \dfrac{|\,u\,|}{|\,v\,|}$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Proposition 4. *Soit* $z \in \mathbb{C}$.

- $|\mathcal{R}e(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\mathcal{R}e(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $|\mathcal{I}m(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\mathcal{I}m(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Théorème 5 (Inégalité triangulaire)**.** Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, alors

- $|\, u + v \,| \leqslant |\, u \,| + |\, v \,|$ et
- $|\, u + v \,| = |\, u \,| + |\, v \,|$ si et seulement si u et v sont positivement colinéaires.

Corollaire 6.
- Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z - z'| \leqslant |z| + |z'|$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

Exemples 1.
1. *Montrer que pour tout* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $|1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geqslant 1$.
2. *Montrer que pour tout* $z \notin \mathbb{U}$, *on a* $\left|\dfrac{1 - z^n}{1 - z}\right| \leqslant \dfrac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$

Corollaire 7.
$\forall u, v \in \mathbb{C}, ||u| - |v|| \leqslant |u - v|$

1.2 Écriture exponentielle

Notation: Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe : $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.
Ainsi, son conjugué s'écrit $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i \sin\theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$.

Proposition 8 (Formules d'Euler)**.** *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 9 (Formule de Moivre)**.** $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},$$

ce qui s'écrit encore

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Exemples 2.
1. *Linéariser* $\cos^2 x$, $\sin^3 x$.
2. *Linéariser* $\cos^n x$.

1.3 Argument

Définition 5. Tout complexe z de module 1 admet une écriture $z = \mathrm{e}^{i\,\theta}$.

Le réel θ n'est pas unique. Cela signifie que l'application $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow U \\ \theta \longmapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$ est surjective mais non injective.

Définition 6. Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ où $r > 0$ désigne le module de z. On dit que θ est un argument de z : θ est définit à 2π près. On le choisit souvent entre $-\pi$ et π ou entre 0 et 2π.
On a donc : $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, avec $z = a + ib$.

Proposition 10.
Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. On a

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$.

Remarque. *Comment traduire $z \in \mathbb{R}^+$?*

Proposition 11.
Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$,

- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$,
- $\arg(z.z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$.

1.4 Géométrie

Définition 7. A tout point $M\ (x, y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + i\,y$ appelé affixe du point M. Le point M est appelé image du complexe z.

On a alors $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |\,z\,| = r$ et une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$ est l'argument de z.
Cela implique $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Définition 8. Si $M\,(u)$ et $N\,(v)$ sont deux points du plan, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égale à $v - u$.

Remarque: Si A, B, C, D sont quatre points distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, alors

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

Exemples 3.

1. *L'ensemble des points $M\,(z)$ tels que : $|\,z - a\,| = |\,z - b\,|$ est la médiatrice du segment $[A\,(a)\,, B\,(b)]$.*

2. L'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z-a| = r > 0$ est le cercle de centre $A(a)$ et de rayon r.

Proposition 12.
Soit A, B, C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. A, B et C sont alignés.
2. les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
3. $\dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

2 Trigonométrie

2.1 égalité des cos/sin/tan

Proposition 13.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi]$ ou $x \equiv -y[2\pi]$.
- $\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow x \equiv y[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - y[2\pi]$
- $\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow x \equiv y[\pi]$

2.2 Factorisation par l'arc moitié

Proposition 14.
Soit p, q deux réels, on a :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et } e^{ip} - e^{iq} = 2ie^{i\frac{p+q}{2}} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

En particulier, on a :

$$1 + e^{iq} = 2e^{\frac{iq}{2}} \cos\left(\frac{q}{2}\right) \text{ et } 1 - e^{iq} = -2ie^{\frac{iq}{2}} \sin\left(\frac{q}{2}\right).$$

Exemples 4.

1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$

2. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ *avec* $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

2.3 Formules de trigonométrie

Proposition 15.
Soit a, b réels, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

on en déduit

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \text{ et } \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Proposition 16.
Soit p, q deux réels, on a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

et

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

3 Équations complexes

3.1 Racines carrées d'un nombre complexe

La fonction réelle notée par $\sqrt{}$ n'existe pas sur $\mathbb{C}$, néanmoins:

Théorème 17.
tout nombre complexe Z admet deux "racines carrées", opposées, $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ telles que $z_1^2 = z_2^2 = Z$ et $z_1 = -z_2$.

Remarque. *Si $Z \in \mathbb{R}^+$ alors $z_1 = \sqrt{Z}$ et $z_2 = -\sqrt{Z}$.*

Pour les trouver:

1. si Z peut se mettre sous forme exponentielle, alors $Z = re^{i\theta}$ et ses racines carrées sont $\pm\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$.
2. Sinon, on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z = a + ib$. Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ xy \text{ du signe de } b \end{cases}$$

Exemples 5.

1. *Déterminer les racines carrées de $i\sqrt{3}$,*
2. *Déterminer les racines carrées de $1 - i$,*
3. *Déterminer les racines carrées de $4 + 3i$.*

3.2 Polynômes

Proposition 18.
Soit P un polynôme à coefficients complexes, alors $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si P peut s'écrire $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ avec $Q(X)$ un polynôme à coefficients complexes.

Exemple 6. *Résoudre* $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

Proposition 19.
Le polynôme $aX^2 + bX + c,\ (a, b, c) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^2$ possède dans $\mathbb{C}$ deux racines (qui peuvent être confondues). Elles s'écrivent : $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2\,a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2\,a}$ où δ est l'un des deux nombres complexes vérifiant : $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

Remarque: On appliquera donc l'une des deux techniques développées dans la section précédente pour déterminer δ.

Exemples 7.
1. *Résoudre* $2x^2 - 3x + 4 = 0$, *puis factoriser* $2X^2 - 3X + 4$.
2. *Résoudre* $x^2 + (1 - i)x - i = 0$

Proposition 20 (Les formules de François Viète)**.**
x_1 et x_2 sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$ ssi $x_1 + x_2 = S$ et $x_1.x_2 = P$.

Exemples 8.
1. *Résoudre* $x^2 - 9x + 8 = 0$ *sans calculer le discriminant.*
2. *Résoudre* $\left\{ \begin{array}{lcl} x + y & = & 5 \\ xy & = & 3 \end{array} \right.$

3.3 Racines n-ièmes de l'unité

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier naturel non nul.

Définition 9. Soit a un complexe. On dit qu'un complexe z est une racine n-ième de a si $z^n = a$.

Définition 10. On dit que c'est une racine n-ième de l'unité si $z^n = 1$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Exemples 9.
1. *Déterminer* $\mathbb{U}_1$.
2. *Déterminons* $\mathbb{U}_2$.

Théorème 21 (Description des racines n-ièmes de l'unité)**.** Soit n un entier naturel non nul. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité qui sont les complexes ω_k définis par

$$\omega_k \;=\; e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!].$$

De plus, ω_1 est un "générateur" de ces nombres au sens où

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \omega_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega_1^k.$$

Exemples 10.

1. *Explicitons* $\mathbb{U}_3$. ***Notations:*** *On note* j *le complexe* $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ***Question:****Que vaut* $arg(1+j)$*?*

2. *Explicitons* $\mathbb{U}_4$.

Proposition 22.
Pour $n \geqslant 2$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ vaut 0. Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0.$$

Exemple 11. *Calculer le produit des racines* n*-ièmes de l'unité.*

3.4 Racines n-ièmes d'un complexe non nul.

Théorème 23.
[Description des racines n-ièmes d'un complexe non nul]
Soit z_0 un complexe non nul. Il existe exactement n racines n-ièmes de z_0. En outre, si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ avec $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, alors les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = z_0$ sont les :

$$\omega_k(z_0) = \underbrace{\left(\sqrt[n]{r_0}\, e^{i\theta_0/n}\right)}_{\substack{\text{une racine n-ième} \\ \text{évidente de } z_0}} \times \underbrace{\omega_k}_{\substack{\text{racines n-ièmes} \\ \text{de l'unité}}} \qquad \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!]$$

Exemples 12.

1. *Déterminer — et dessiner — les complexes* z *tels que* $z^4 = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}i$.

2. *soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer les complexes* z *tels que*

$$(i+z)^n = (i-z)^n$$