Primitives et ED

1 Primitives

1.1 Notation intégrale

On sait que toute fonction continue f admet une primitive et que $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.
Parfois, on veut juste travailler avec UNE primitive et ne pas s'encombrer d'une constante. La notation $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (sans borne en bas) désigne une primitive de f (de variable x).

Exemples 1.

1. $\int^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x)$
2. $\int^x (1+t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+x)^2$

Cette notation a un gros inconvénient: elle peut désigner deux fonctions qui ne sont égales qu'à constante près. Par exemple, on a aussi $\int^x (1+t)\,\mathrm{d}t = x + \frac{1}{2}x^2$.

1.2 Calcul de primitives

On a vu qu'il y a différents moyens de calculer une intégrale: IPP, changement de variable. On va, bien sûr, utiliser ces méthodes pour les calculs de primitives. On procèdera comme pour une intégrale mais en modifiant seulement la borne supérieure.

Exemples 2.

1. *Calcul de* $\int^x te^t\,\mathrm{d}t$.

   On pose $u(t) = t, v'(t) = e^t$, *on a* $u'(t) = 1$ *et* $v(t) = e^t$ *donc*
   $$\int^x te^t\,\mathrm{d}t = \left[te^t\right]^x - \int^x e^t\,\mathrm{d}t = (x-1)e^x.$$

2. *Calcul de* $\int^x \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$.

   On pose $y = e^t$, *on a* $dy = e^t dt$ *puis* $dt = \frac{dy}{y}$, *on a donc*
   $$\int^x \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \int^{e^x} \frac{1}{(1+y)y}\,\mathrm{d}y = \int^{e^x} \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y,$$
   d'où
   $$\int^x \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \ln(e^x) - \ln(e^x+1) = x - \ln(e^x+1).$$
   On peut aussi faire plus rapide :
   $$\int^x \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{1+e^t-e^t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \int^x 1 - \frac{e^t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = x - \ln(1+e^x)$$

1.3 primitive de fractions rationnelles

On peut déterminer une primitive de l'inverse d'un polynôme de degré 2 c'est-à-dire de la forme $\int^x \dfrac{dt}{t^2+bt+c}$:

Proposition 1.
On note Δ le discriminant de X^2+bX+c. Alors

- Si $\Delta > 0$, il existe deux réels distincts r_1, r_2 tels que $X^2+bX+c = (X-r_1)(X-r_2)$. On a alors $\dfrac{1}{X^2+bX+c} = \dfrac{\alpha}{X-r_1} + \dfrac{\beta}{X-r_2}$ et $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+bt+c} = \alpha \ln|x-r_1| + \beta \ln|x-r_2|$.

- Si $\Delta = 0$, il existe un réel r tel que $X^2+bX+c = (X-r)^2$. On a alors $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+bt+c} = -\frac{1}{x-r}$.

- Si $\Delta < 0$, alors $X^2+bX+c = \left(X+\dfrac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(\dfrac{4c-b^2}{4}\right)}_{>0}$ et après changement de variable, on se ramène à intégrer $\dfrac{\lambda}{y^2+1}$ en $\lambda \arctan(y)$.

Exemples 3.

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-5t+4}$?
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4t+4}$?
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}$?

2 Équations différentielles d'ordre 1

2.1 Définition et structure de l'ensemble des solutions

Définition 1. Soit $a : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. On considère l'EDL d'ordre 1 (E) et l'équation homogène associée (E_H) :

$$y' + a(t)y = f \qquad (E)$$

$$y' + a(t)y = 0 \qquad (E_H)$$

Une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ est dite **solution** de (E) si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie :

$$\forall t \in I\,,\ y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Remarque. *L'ensemble des solutions est donc un ensemble de fonctions !!*

Théorème 2 (Principe de superposition)**.** *Si une fonction y_1 est une solution de l'équation $y' + a(t)y = f_1$ et y_2 est solution de $y'+a(t)y = f_2$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues, alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)$ est solution de l'équation $y'+a(t)y = \lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$.*

Conséquence : Si y_P est une solution particulière de (E), alors pour toute autre solution y de (E), la fonction $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f - f = 0$, c'est-à-dire solution de (E_H). On a donc

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

2.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 3.
Notons $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a. Les solutions de (E_H) sont les fonctions de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : t \mapsto C\, e^{-A(t)} \qquad \text{où } C \text{ est une constante de } \mathbb{K}$$

Preuve: *analyse: Soit y une solution de (E_H). On procède par disjonction de cas:*
On commence par remarquer que $y = 0$ est solution.
On suppose ensuite que y est une fonction qui ne s'annule pas alors

$$y \text{ solution de } E_H \Rightarrow \frac{y'}{y} = -a \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \ln|y| = -A + C \Rightarrow |y| = e^{-A}e^{C}.$$

On sait que y ne s'annule pas et elle est continue, elle est donc de signe constant. Si y est positive, on pose $\lambda = e^C$. Sinon, on pose $y = -e^C$.

On a donc

$$y \text{ solution de } E_H \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y = \lambda e^{-A}.$$

Il reste maintenant à traiter le cas d'une fonction quelconque. Soit donc y quelconque, on va montrer que ye^A est constante, ce qui prouvera que y est de la forme Ce^{-A}.

On pose $f = ye^A$, on a $f' = y'e^A + aye^A = -aye^A + aye^A = 0$. La dérivée de f est nulle, f est bien constante.

Synthèse Soit $f = Ce^{-A}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Montrons que f est solution de E_H. On a $f' = -aCe^{-A}$ donc $f' + af = 0$ et f est bien solution.

Exemples 4.

1. *$y' + y = 0$. Les solutions sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}$.*
2. *$y' + ty = 0$. Les solutions les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$.*
3. *Résoudre $y' + \frac{1}{t}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, $\mathbb{R}_-^\star$ puis $\mathbb{R}^\star$. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^\star$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$*
   Les solutions sur $\mathbb{R}_-^\star$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{\mu}{t}$, $\mu \in \mathbb{R}$.
   En fait $x \mapsto \frac{C}{|x|}$ mais comme signe constant, on rentre le signe dans la constante. Si f est une solution sur $\mathbb{R}^\star$, alors $f|_{\mathbb{R}_+^\star}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^\star$, idem pour $\mathbb{R}_-^\star$.

2.3 Recherche d'une solution particulière

Méthode 1.
On se place dans le cas $y' + ay = f(t)$, où $a \in \mathbb{K}^*$ est constant.

- si f est constante, chercher y_P constante.
- si f est polynomiale, chercher y_P polynomiale, de même degré.
- si $f : t \mapsto e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :
  - si $\alpha \neq -a$ chercher y_P de la forme $\lambda e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$;
  - si $\alpha = -a$ chercher y_P de la forme $\lambda t e^{\alpha t}$;
- si a est réel et $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$, chercher y_P de la forme $\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exemples 5.

1. *Trouver une solution particulière de $y' + y = e^{2x}$. On a $a = 1$ et $2 \neq -1$, on cherche donc une solution sous la forme $y_p(x) = \lambda e^{2x}$. On a $y_p'(x) = 2\lambda e^{2x}$ puis $3\lambda e^{2x} = e^{2x}$ ce qui impose $\lambda = \dfrac{1}{3}$. On a donc $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{2x}$.*

2. *Trouver une solution particulière de $y' + y = e^{-x}$. On a $a = 1$, on cherche donc une solution sous la forme $y_p(x) = \lambda x e^{-x}$. On a $y_p'(x) = -\lambda x e^{-x} + \lambda e^{-x}$ donc $\lambda e^{-x} = e^{-x}$ puis $\lambda = 1$. Une solution particulière est donc $y_p(x) = xe^{-x}$.*

3. *Trouver une solution particulière de $y' + y = 2e^{-x} + 3e^x$. On va chercher une solution particulière y_{p_1} de $y' + y = 2e^{-x}$ puis une solution y_{p_2} de $y' + y = 3e^x$. On cherche y_{p_1} sous la forme $y_{p_1}(x) = \lambda x e^{-x}$, on a $\lambda = 2$ donc $y_{p_1}(x) = 2xe^{-x}$.*

   On cherche y_{p_2} sous la forme $y_{p_2}(x) = \mu e^x$, on a $y_{p_2}' + y_{p_2} = 2\mu e^x$ donc $\mu = \dfrac{3}{2}$ et $y_{p_2}(x) = \dfrac{3}{2}e^x$. On en déduit qu'une solution particulière est $y_p(x) = 2xe^{-x} + \dfrac{3}{2}e^x$.

4. *Trouver une solution particulière de $y' - y = \cos(x)$. On cherche y_p sous la forme $y_p(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$. On a $y_p'(x) = -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$ donc*

   $$y_p'(x) - y_p(x) = (\mu - \lambda)\cos(x) - (\lambda + \mu)\sin(x)$$

   On en déduit (nous verrons plus tard pourquoi!) que $\mu - \lambda = 1$ et $\lambda + \mu = 0$ donc $\mu = \dfrac{1}{2} = -\lambda$. On a donc $y_p(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{1}{2}\sin(x)$.

Théorème 4 (variation de la constante)**.** Si A est une primitive de a sur I, alors une solution particulière de (E) est la fonction :

$$y_{\mathrm{P}} \ : \ t \mapsto C(t)\, e^{-A(t)} \qquad \text{où la fonction } C \text{ est une primitive de } f.e^{A}$$

Remarque. *$e^{-A(t)}$ est solution de (E_H), son expression a donc déjà été simplifiée en déterminant les solutions de l'équation homogène.*

Exemples 6.

1. *Trouver une solution particulière de $y' + y = \cos(x)e^x$. On sait que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-x}$, on cherche donc y_p sous la forme $y_p(x) = C(x)e^{-x}$. On a $C'(x)e^{-x} = \cos(x)e^x$ donc $C'(x) = \cos(x)e^{2x}$.*

   Reste à trouver une primitive de $x \mapsto \cos(x)e^{2x}$. <u>1ère méthode:</u> deux IPP:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int^x \cos(t)e^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\sin(t)e^{2t}\right]_x - \int^x 2e^t \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(x)e^{2x} + \left[2\cos(t)e^{2t}\right]^x - 4\int^x \cos(t)e^{2t}\,\mathrm{d}t.7 \end{aligned}$$

   On en déduit que $5\int^x \cos(t)e^{2t}\,\mathrm{d}t = (\sin(x) + 2\cos(x))\,e^{2x}$ donc

$$C(x) = \frac{(\sin(x) + 2\cos(x))e^{2x}}{5},$$

   puis

$$y_p(x) = \frac{(\sin(x) + 2\cos(x))e^{x}}{5}$$

   <u>2ème méthode:</u> On écrit

$$C(x) = \int^x \mathcal{R}e\left(e^{(2+i)t}\right)\,\mathrm{d}t = \mathcal{R}e\left(\int^x e^{(2+i)t}\,\mathrm{d}t\right),$$

   on a

$$\begin{aligned} \int^x e^{(2+i)t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{e^{(2+i)t}}{2+i}\right]^x \\ &= \frac{e^{(2+i)x}}{2+i} = \frac{(2-i)e^{2x}e^{ix}}{5} \end{aligned}$$

   donc

$$C(x) = \mathcal{R}e\left(\frac{(2-i)e^{2t}e^{it}}{5}\right) = \frac{(2\cos(x) + \sin(x))\,e^{2x}}{5}$$

   On retrouve bien la même valeur.

2. *Trouver une solution particulière de $y' + \frac{1}{x}y = 3x$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{C(x)}{x}$. On a $\frac{C'(x)}{x} = 3x$ donc $C'(x) = 3x^2$ et $C(x) = x^3$. Une solution particulière est $y_p(x) = x^2$.*

3. *Trouver une solution particulière de $y' + \frac{1}{t}y = \ln(t)$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \frac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \frac{C(t)}{t}$. On a $C'(x) = t\ln(t)$ donc $C(x) = \int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = t$ donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = \frac{t^2}{2}$, on obtient*

$$C(x) = \left[\frac{t^2\ln(t)}{2}\right]^x - \int^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

   On a donc $y_(x) = \frac{2x\ln(x) - x}{4}$.

2.4 Résolution de l'équation complète

Théorème 5.
Les fonctions $I \to \mathbb{K}$ solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

où y_H est une solution de l'équation homogène (E_H) et y_P est une solution particulière de (E).

Exemple 7. Résoudre les équations du paragraphe précédent.

Les solutions de $y' + y = \cos(x)e^x$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-x} + \dfrac{(\sin(x) + 2\cos(x))e^x}{5}, \lambda \in \mathbb{R}$.
Les solutions de $y' + \dfrac{1}{x}y = 3x$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x} + x^2, \lambda \in \mathbb{R}$.
Les solutions de $y' + \dfrac{1}{t}y = \ln(t)$ sont les fonctions $t \mapsto \dfrac{\lambda}{t} + \dfrac{2t\ln(t) - t}{4}, \lambda \in \mathbb{R}$.

On peut aussi passer aux complexes pour résoudre une équation réelle.

Exemple 8. Résoudre $y' - y = \cos(x)$ en résolvant l'équation $y' - y = e^{ix}$.

Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche maintenant une solution particulière. On va commencer par chercher une solution particulière complexe de $z' - z = e^{ix}$. Une solution particulière se cherche sous la forme $z_p'(x) = \mu e^{ix}$ avec $\mu \in \mathbb{C}$. On a $z_p'(x) - z_p(x) = \mu(i-1)e^{ix}$ donc $\mu)\dfrac{1}{i-1} = -\dfrac{i+1}{2}$. Une solution de $y' - y = \cos(x)$ est la partie réelle de z_p. On a donc $y_p(x) = \mathcal{R}e\left(-\dfrac{i+1}{2}e^{ix}\right) = \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{2}$. On retrouve les solutions de l'exemple 4.

Théorème 6 (Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy)**.** *Soit a une fonction continue et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique fonction dérivable vérifiant :*

$$\begin{cases} f' + af = 0 \\ f(0) = \lambda \end{cases}$$

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3.1 Définition et structure de l'ensemble des solutions

Définition 2. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On considère l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants (E) et l'équation homogène associée (E_H) :

$$y'' + ay' + by = f(t) \qquad (E)$$

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E_H)$$

Théorème 7 (Principe de superposition)**.** Si une fonction y_1 est une solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_1(t)$ et y_2 est solution de $y'' + ay' + by = f_2(t)$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues, alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$.

Conséquence : Si y_P est une solution particulière de (E), alors pour toute autre solution y de (E), la fonction $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f(t) - f(t) = 0$, c'est-à-dire solution de (E_H). On a donc

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

3.2 Résolution de l'équation homogène

Définition 3. On appelle **équation caractéristique associée à** $y'' + ay' + by = 0$ (c'est-à-dire $(\mathbf{E_H})$) l'équation polynomiale

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0} \qquad \text{notée } (E_c)$$

Théorème 8 (Solutions de (E_H) à valeurs complexes)**.** Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On note Δ le discriminant de (E_c).

- **Si $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$**, on note r_1 et r_2 les deux racines complexes de (E_c) et les solutions de (E_H) sont les fonctions de la forme : $y_H \ : \ t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$
- **Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$** et r_0 la racine double, les solutions de (E_H) sont : $y_H \ : \ t \mapsto (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$

Preuve: *quitte à avoir $r_1 = r_2 = r_0$ (si $\Delta = 0$), on a $r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2)$ (forme factorisée), et en particulier les relations coefficients-racines :*

$$\begin{cases} a = -(r_1 + r_2) \\ b = r_1 r_2 \end{cases}$$

Soit $y : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $\forall t \in I$: $z(t) = y(t)e^{-r_1 t}$, de sorte que :

$$\begin{cases} y(t) = z(t)e^{r_1 t} \\ y'(t) = e^{r_1 t}\left(z'(t) + r_1 z(t)\right) \\ y''(t) = e^{r_1 t}\left(z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)\right) \end{cases}$$

Donc y est solution de (H_2) ssi $\forall t \in I$:

$$e^{r_1 t}\left(z''(t) + (\underbrace{2r_1 + a}_{r_1 - r_2})z'(t) + (\underbrace{r_1^2 + ar_1 + b}_{=0})z(t)\right) = 0$$

$$\iff \boxed{z''(t) + (r_1 - r_2)z'(t) = 0}$$

On reconnaît alors une EDL d'ordre 1 d'inconnue z'.

- ▶ 1^{er} *cas : si $r_1 - r_2 \neq 0$ (ce qui équivaut à $\Delta \neq 0$)*
  La résolution de l'EDL donne :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \ \ tq \ \ \forall t \in I \ \ , \ \ z'(t) = \lambda e^{-(r_1 - r_2)t}$$

$$\textit{et par suite :} \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{C};\ tq\ \ \forall t \in I\ \ ,\ \ z(t) = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{-(r_1-r_2)t} + \mu$$

Enfin, comme $y(t) = z(t)e^{r_1 t}$*, c'est équivalent à* $y(t) = \dfrac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + \mu e^{r_1 t}$.
En renommant les constantes $C_1 = \mu$ *et* $C_2 = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2}$*, c'est bien le résultat prévu par le théorème.*

▶ $2^{ème}$ *cas : si* $r_1 - r_2 = 0$ *(ce qui équivaut à* $\Delta = 0$*)*
z *est alors solution de l'équation encadrée ssi :*

$$\begin{aligned}
\forall t \in I\ \ ,\ \ \boxed{z''(t) = 0} &\iff \exists C_2 \in \mathbb{C}\ \ tq\ \ \forall t \in I\ \ ,\ \ \boxed{z'(t) = C_2} \\
&\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{C}\ \ tq\ \ \forall t \in I\ \ ,\ \ \boxed{z(t) = C_1 + C_2 t} \\
&\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{C}\ \ tq\ \ \forall t \in I\ \ ,\ \ \boxed{y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}} \qquad \underline{ok}
\end{aligned}$$

Théorème 9 (solutions de (E_H) à valeurs réelles)**.** On suppose ici que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. Soit Δ le discriminant de (E_c) (forcément réel, lui aussi).

- **Si** $\boldsymbol{\Delta > 0}$, on note r_1 et r_2 les deux racines réelles de (E_c) et les solutions de (E_H) sont de la forme :
$$y_H\ :\ t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$
- **Si** $\boldsymbol{\Delta = 0}$, on note r_0 la racine réelle double et les solutions de (E_H)sont :
$$y_H\ :\ t \mapsto (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t} \qquad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$
- **Si** $\boldsymbol{\Delta < 0}$, alors les deux racines de (E_c) sont complexes conjuguées, notées $r + i\omega$ et $r - i\omega$, où $(r, \omega) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (E_H)sont alors les fonctions de la forme :
$$y_H\ :\ t \mapsto (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))\, e^{rt} \qquad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Preuve: *La première remarque fondamentale est que si* y *est une fonction complexe solution de* (E_H)*, alors en prenant la partie réelle dans l'égalité* $y'' + ay' + by = 0$*, on obtient*

$$Re(y)'' + aRe(y)' + bRe(y) = 0 \qquad \textit{(car a et b sont réels)}$$

ce qui signifie que la fonction $Re(y)$ *est une solution (réelle, donc) de* (H_2)*.*
Réciproquement, toute fonction réelle solution de (H_2) *peut être vue comme la partie réelle d'une solution complexe de* (H_2) *(elle-même).*
Conclusion : ***les solutions réelles de*** (H_2) ***sont très exactement les parties réelles des solutions complexes de*** (H_2)***.***

▶ *Si* $\Delta > 0$ *(et donc* r_1 *et* r_2 *sont réelles). Il s'agit de déterminer la partie réelle de*

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad \textit{où}\ \boxed{C_1, C_2 \in \mathbb{C}}$$

$$\textit{ce qui donne} \quad Re(y(t)) = \underbrace{Re(C_1)}_{\hat{=} K_1} e^{r_1 t} + \underbrace{Re(C_2)}_{\hat{=} K_2} e^{r_2 t}$$

K_1 *et* K_2 *sont deux constantes pouvant prendre toutes les valeurs réelles. On obtient bien la forme annoncée par le théorème, à un changement de notations près.*

- *Si $\Delta = 0$ (et donc r_0 racine double réelle) : même raisonnement.*

- *Si $\Delta < 0$ (on a donc deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$), il s'agit de prendre la partie réelle de*
$$y(t) = C_1 e^{(r+i\omega)t} + C_2 e^{(r-i\omega)t} \qquad \text{où } \boxed{C_1, C_2 \in \mathbb{C}}$$
Or :
$$\begin{aligned} y(t) &= e^{rt}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right] \\ &= e^{rt}\left[C_1(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + C_2(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\right] \\ &= e^{rt}\left[(C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega t)\right] \end{aligned}$$
Donc :
$$Re(y(t)) = e^{rt}\left[\underbrace{Re(C_1 + C_2)}_{\hat{=}K_1}\cos(\omega t) + \underbrace{Re(i(C_1 - C_2))}_{\hat{=}K_2}\sin(\omega t)\right]$$
K_1 et K_2 sont deux constantes pouvant prendre toutes les valeurs réelles. En effet, si l'on fixe $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, le couple de complexes $(C_1, C_2) = (s_1, is_2)$ donne $K_1 = s_1$ et $K_2 = s_2$. On obtient bien la forme annoncée par le théorème, à un changement de notations près.

Exemples 9.

1. *Résoudre $y" - 2y' + y = 0$ On a $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$. Les solutions sont de la forme $x \mapsto (Ax + B)e^x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.*

2. *Résoudre $y" - 3y' + 2y = 0$. On a $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r-2) = 0$. Les solutions sont de la forme $x \mapsto Ae^{2x} + Be^x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.*

3. *Donner les solutions réelles et complexes de $y" + y' + y = 0$. On a $r^2 + r + 1 = 0 = (r - j)(r - j^2)$. Les solutions complexes sont $x \mapsto Ke^{jx} + K'e^{j^2x}$, $(K, K') \in \mathbb{C}^2$. Les solutions réelles sont $x \mapsto e^{-x/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.*

3.3 Recherche d'une solution particulière

Méthode 2.

- si f est une fonction constante, chercher y_P constante.
- si f est polynomiale, identifier le terme dominant pour déterminer le degré d'une solution polynomiale puis chercher une telle solution.
- si $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P(t)$ un polynôme, alors :
  - si α n'est pas une racine de (E_C), chercher $y_P(t) = Q(t)e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, avec $\deg(Q) = \deg(P)$.
  - si α est une racine simple de (E_C), chercher $y_P(t) = Q(t)te^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\deg(Q) = \deg(P)$.
  - si α est une racine double de (E_C), chercher $y_P(t) = Q(t)t^2e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\deg(Q) = \deg(P)$.
- si les coefficients a et b sont réels et $f(t) = \sin(\Omega t)$ ou $\cos(\Omega t)$, chercher $y_P(t) = \lambda\cos(\Omega t) + \mu\sin(\Omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Pour aller plus vite, on peut aussi trouver une solution particulière complexe de $y'' + ay' + by = \mathbf{e^{i\Omega t}}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\Omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\Omega t)$).

Exemples 10.

1. *Trouver une solution particulière de* $y" - 3y' + 2y = xe^{4x}$ *puis* xe^{2x} *On cherche* y_p *sous la forme* $(ax+b)e^{4x}$, *on trouve* $a = \dfrac{1}{6}$ *et* $b = -\dfrac{5}{36}$.
   Trouver une solution particulière de $y" - 3y' + 2y = xe^{2x}$.
   On cherche y_p *sous la forme* $(ax^2 + bx)e^{2x}$, *on trouve* $a = \dfrac{1}{2}$ *et* $b = -1$.
2. *Trouver une solution particulière de* $y" - 2y' + y = e^x$ *On cherche* y_p *sous la forme* ax^2e^x, *on trouve* $a = \dfrac{1}{2}$.
3. *Trouver une solution particulière de* $y" + y = \cos(x)$. $y_p(x) = -\dfrac{1}{2}ie^{ix}$.

3.4 Résolution de l'équation complète

Théorème 10.
Les fonctions $I \to \mathbb{K}$ solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

où y_H est une solution de l'équation homogène (E_H) et y_P est une solution particulière de (E).

Exemple 11. *Résoudre les équations données dans le paragraphe précédent.*

Théorème 11.
Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Soit $t_0 \in I$.
Alors pour tout couple $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ sur I qui satisfait le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Interprétation physique : *en mécanique du point, l'équation du mouvement ne suffit pas à déterminer la trajectoire de l'objet. Typiquement, on la détermine en utilisant les conditions initiales :* ***position initiale*** *(y_0) et* ***vitesse initiale*** *(v_0).*