Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
Feuille 8

TD 8: Droite réelle.

1 Détermination de bornes supérieures et inférieures

Exercice 1.
Déterminer le maximum de $A = \left\{ \frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}, n \in \mathbb{N}^\star \right\}$.

Exercice 2.
Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, inférieure, le minimum et maximum des parties suivantes:

1. $\left\{ \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^\star \right\}$.
2. $\left\{ x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 \geqslant 0 \right\}$.
3. $\left\{ x \in \mathbb{Q}, x^2 > 1 \right\}$.
4. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.
5. $]0,1[\cap \mathbb{Q}$.

Exercice 3.
Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sup\{\lambda + a, a \in A\} = \lambda + \sup(A)$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\sup\{\lambda a, a \in A\} = \lambda \sup(A)$.
3. À quoi est égal $\sup\{\lambda a, a \in A\}$ si $\lambda < 0$?

Exercice 4.
Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$.

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $B \subset A \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A; \sup B)$,

2 Autour de la partie entière

Exercice 5.
Montrer que :
$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n,$$

Exercice 6.
Pour chacune des égalités, trouver un couple $(a,b) \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})^2$ la vérifiant :

- $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.
- $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$.
- $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor$
- $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor + 1$
- $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor - 1$
- $\lfloor na \rfloor \neq n\lfloor a \rfloor$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.
- Soit $k \in \mathbb{Z}$, $\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor + k$.

Exercice 7.
Montrer la relation :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1,$$

Exercice 8.
Déterminer la limite de $x \mapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 9.
Montrer que :
$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^\star, \quad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 10.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 \Leftrightarrow x^2 - \lfloor x \rfloor^2 \in [0,1[$.

Exercice 11.
Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor$.

3 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 12.
Montrer que l'ensemble $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ est borné et déterminer sa borne supérieure et sa borne inférieure. Admet-il un maximum et un minimum?

Exercice 13.
Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, on note $A+B := \{a+b, (a,b) \in A\times B\}$ et $-A := \{-a, a \in A\}$. Montrer les assertions suivantes:

1. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,
2. $\inf(-A) = -\sup A$,
3. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A+B)$.

Exercice 14.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Exprimer $\lfloor -y \rfloor$ en fonction de $\lfloor y \rfloor$.

Exercice 15.
Montrer que l'application $x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ prend ses valeurs dans $\{0,1\}$.

Exercice 16.
Soit $x \leqslant 0$. Montrer que $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$. Le résultat est-il vrai si $x > 0$?

4 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 17.
Soient f et g deux fonctions bornées sur $[a,b]$. Montrer que

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t)|.$$

Exercice 18.
Déterminer $\inf_{a\in\mathbb{R}} \left(\sup_{x\in[0,1]} |x^2+ax-1| \right)$.

Exercice 19.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{j}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 20.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$

Exercice 21.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Memo

1. Comment trouver un majorant/minorant?
   (a) Utiliser l'inégalité triangulaire
   (b) Étudier une fonction
2. Comment déterminer la borne sup/inf d'un ensemble borné?
   (a) Trouver un majorant/minorant puis déterminer si c'est le plus petit/grand
   (b) Étudier les variations d'une fonction
3. Comment majorer/minorer la borne supérieure/inférieure?
   Utiliser la définition c'est-à-dire le plus grand/petit des minorants/majorants.
4. Comment montrer des égalités/inégalités avec des parties entières?
   Revenir à la définition