Correction du TD n 7

Correction 1 $\displaystyle\int^t \mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}^3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{sh}^4 t.$

Correction 2 $[\arcsin t]_0^1 = \dfrac{\pi}{2}.$

Correction 3 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $-\dfrac{u'}{u^3}$, on a donc $\displaystyle\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cos^2(x)}$

Remarque. *On peut aussi écrire* $\dfrac{\sin(t)}{\cos^3(t)} = \dfrac{\tan(t)}{\cos^2 t}$ *qui est de la forme $u'.u$, on a donc* $\displaystyle\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\tan^2 x$. *Attention, on trouve alors une autre primitive (égale à la précédente à constante près !).*

.

Correction 4 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $u'.u$. On a $\displaystyle\int^x \cos t\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin^2 x$ (ou $-\dfrac{1}{2}\cos^2 x$).

Correction 5 On écrit $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$. On a donc $\displaystyle\int^x \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$.

Correction 6 On écrit :

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{t+1-2}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}.$$

On a donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [t - 2\ln|t+1|]_0^1 = 1 - 2\ln(2).$$

Correction 7 On écrit $\dfrac{1}{e^t+1} = \dfrac{e^t+1-e^t}{e^t+1} = 1 - \dfrac{e^t}{1+e^t}$. Le deuxième terme est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, on a donc $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{e^t+1} = x - \ln(1+e^x)$.

Correction 8 On pose $u = \ln(t)$, on a $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{t}}$. Comme t varie de 1 à e^π, u varie de 0 à π. On obtient

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\sin(\mathrm{u})\mathrm{du} = \frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2}.$$

Correction 9 $\displaystyle\int^x (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t = (x+1)\mathrm{sh}x - \int_0^x \mathrm{sh}t\,\mathrm{d}t = (x+1)\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x.$

Correction 10 On fait une double intégration par partie : $\displaystyle\int^t (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x = \arcsin^2 t + 2\arcsin t\sqrt{1-t^2} - 2t$.

Correction 11

1. On pose $t = \ln(x)$, on a donc $dt = \dfrac{1}{x}dx$ donc $dx = e^t dt$. x varie de 1 à e donc t varie de 0 à 1. On a donc
$$I_n = \int_0^1 e^t t^n\,\mathrm{d}t$$
2. Pour tout $t \in [0,1]$, $e^t \in [1,e]$ donc $t^n \leqslant e^t t^n \leqslant e.t^n$. Par croissance de l'intégrale, on a donc
$$\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \leqslant I_n \leqslant e.\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$
et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergente par le thm des gendarmes: elle converge vers 0.
3. On fait une intégration par partie, on trouve
$$I_{n+1} = \left[t^{n+1}e^t\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 e^t t^n\,\mathrm{d}t = e - (n+1)I_n.$$
4. D'après la question précédente, on a $nI_n = -I_{n+1} + e - I_n$. d'après la question 2, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = e$.

Correction 12 On écrit $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2(1+x)} + \dfrac{1}{2(1-x)}$. On en déduit que

$$\int^t \frac{1\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = \int^t \left(\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| = \ln\sqrt{\left|\frac{1+t}{1-t}\right|}.$$

Correction 13 On écrit :
$$\frac{t+1}{t(1-t)}=\frac{-(t-1)+2t}{}=\frac{1}{t}-\frac{2}{t-1}.$$
On a donc $\displaystyle\int^x \frac{(t+1)dt}{t(1-t)}\,\mathrm{d}t=\ln|x|-\ln((x-1)^2)=\ln\left|\frac{x}{(x-1)^2}\right|$.

Correction 14 On écrit $\dfrac{1}{t^2+t}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}$ puis on intègre :
$$\int^x \frac{1\,\mathrm{d}t}{t^2+t}=\ln|x|-\ln|x+1|.$$

Correction 15 On écrit $\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{(x+1)^2+1}$. On a alors $\displaystyle\int^t \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\arctan(t+1)$.

Correction 16 On travaille sur un intervalle sur lequel $x\mapsto e^x-1$ ne s'annule pas. On pose $I_1=\mathbb{R}_+^*$ et $I_2=\mathbb{R}_-^*$. On travaille sur I_i. On commence par chercher les solutions de l'équation homogène associée. Pour cela, il faut déterminer une primitive de $\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ ce que l'on a fait à l'exercice 25. On a:
$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx=-2\ln|e^x-1|+x.$$
Les solutions, sur I_i, de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme :
$$x\mapsto \frac{\lambda e^x}{(1-e^x)^2},\lambda\in\mathbb{R}.$$
Pour trouver une solution particulière, on procède par la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(x)=\dfrac{\lambda(x)e^x}{(e^x-1)^2}$.

y_p est solution si et seulement si $(e^x-1)\dfrac{\lambda'(x)e^x}{(e^x-1)^2}=e^x+2$ c'est-à-dire :
$$\lambda'(x)e^x=(e^x+2)(e^x-1)=e^{2x}+e^x-2,$$
soit encore :
$$\lambda'(x)=e^x+1-2e^{-x}.$$
On a donc : $\lambda(x)=e^x+x+2e^{-x}$ et $y_p(x)=\dfrac{e^{2x}+xe^x+2}{(e^x-1)^2}$. Les solutions de l'équation, sur I_i, sont :
$$x\mapsto\frac{\lambda e^x+e^{2x}+xe^x+2}{(1-e^x)^2}+,\lambda\in\mathbb{R}.$$

Correction 17 On travaille sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda e^{x^2/2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Une solution évidente est $x\mapsto e^{x^2}$ donc les solutions sont les fonctions $x\mapsto e^{x^2}+\lambda e^{x^2/2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Remarque. *Si on ne voit pas la solution évidente, on peut procéder par la méthode de la variation de la constante et chercher une solution particulière sous la forme* $\lambda(x)e^{\frac{x^2}{2}}$. *On trouve* $\lambda'(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}$. *On reconnaît une fonction de la forme* $u'e^u$ *donc* $\lambda(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$ *et une solution particulière est* $y_p(x)=e^{\frac{x^2}{2}}e^{\frac{x^2}{2}}=e^{x^2}$.

Correction 18 On travaille sur un intervalle sur lequel sin ne s'annule pas. On pose $I_i=]i\pi,(i+1)\pi[$, $i\in\mathbb{Z}$. Les solutions de l'équation homogène sur I_i sont $x\mapsto\lambda_i\sin x$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda(x)\sin(x)$. On trouve $\lambda'(x)=1$ donc $\lambda(x)=x$ et $y_p(x)=x\sin(x)$. Les solutions sur I_i sont donc les fonctions $x\mapsto(\lambda_i+x)\sin x$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$.

Correction 19 On travaille sur $\mathbb{R}$. On écrit $\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}=1-\dfrac{2x}{1+x^2}$, une primitive de $\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ est donc $x\mapsto x-\ln(1+x^2)$.
Les solutions de l'équation homogène sont $x\mapsto\lambda e^{-x}(1+x^2)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y_p(x)=ax+b$. On a y_p solution si et seulement si $a(x^2+1)+(x-1)^2(ax+b)=x^3-x^2+x+1$. En développant et en identifiant les coefficients des deux membres on trouve $y_p(x)=x+1$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions : $x\mapsto\lambda e^{-x}(1+x^2)+x+1,\lambda\in\mathbb{R}$.

Correction 20 On travaille sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x\mapsto\lambda\cos(x),\lambda\in\mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution sous la forme $x\mapsto\lambda(x)\cos(x)$, ce qui implique $\lambda'(x)=\cos(x)$ donc $\lambda(x)=\sin(x)$. Une solution particulière est $x\mapsto\sin(x)\cos(x)$. L'ensemble des solutions est :
$$\{x\mapsto\lambda\cos(x)+\sin(x)\cos(x),\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Correction 21 1. On cherche une solution polynômiale. Si a_mx^m est le terme dominant du polynôme, on doit avoir $a_m.mx^{m-1}x^2-3xa_mx^m=0$ (puisque le second membre est une constante). Cela impose $m=3$. On cherche maintenant une solution sous la forme ax^3+bx^2+cx+d. On dérive et on injecte dans l'équation puis on identifie au polynôme constant égal à 1. On obtient le système :
$$\begin{cases}-b &=0\\ 3a-2c &=0\\ 2b-3d &=0\\ c &=1\end{cases}.$$

On obtient $b = d = 0$, $c = 1$ et $a = \frac{2}{3}$. Une solution particulière est donc $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + x$.

2. On travaille sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont $\lambda(1+x^2)^{3/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{x \mapsto \lambda(1+x^2)^{3/2} + \frac{2x^3}{3} + x, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Correction 22 L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet 1 et 2 pour racine donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Une solution particulière est $y = \dfrac{1}{2}$, les solutions sont donc :

$$x \mapsto \frac{1}{2} + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$. Par identification, on a $6a = 1, 6b - 5a = -1$. On trouve $a = \dfrac{1}{6}$ et $b = -\dfrac{1}{36}$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \left(\frac{x}{6} - \frac{1}{36}\right) e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3. On cherche une solution particulière sous la forme $x(ax+b)e^{2x}$. Par identification, on a $2a = 1$ et $2a + b = 1$. On trouve $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

4. On cherche une solution particulière sous la forme $\alpha \cos x + \beta \sin x$. Par identification, on trouve $\beta + 3\alpha = 1$ et $\alpha - 3\beta = 0$. On a donc $\alpha = \dfrac{3}{10}$ et $\beta = \dfrac{1}{10}$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 23 On procède par disjonction de cas :

- Si $a = 0$, alors $y" = 0$ et les solutions sont les fonctions affines $x \mapsto ax+b, (a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $a < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes : $\pm\sqrt{-a}$. Les solutions sont donc les fonctions
$$x \mapsto \lambda e^{\sqrt{-a}x} + \mu e^{-\sqrt{-a}x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
- Enfin, si $a > 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\pm i\sqrt{a}$, les solutions sont alors les fonctions
$$x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{a}x) + \mu \sin(\sqrt{a}x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 24 L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ admet pour racines 1 et 2. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que z_p est une solution particulière (complexe) de l'équation $z" + z' - 2z = 2e^{ix}$ si et seulement si sa partie imaginaire y_p est une solution particulière de $y" + y' - 2y = 2\sin x$. Cherchons une solution particulière de l'équation complexe sous la forme $z_p : x \mapsto \alpha e^{ix}$ puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $z_p'(x) = i\alpha e^{ix}$ et $z"_p(x) = -\alpha e^{ix}$. La fonction z_p est solution de l'équation si et seulement si $(-\alpha + i\alpha - 2\alpha)e^{ix} = 2e^{ix}$ c'est-à-dire $\alpha = \dfrac{2}{i-3}$.

Déterminons maintenant la partie imaginaire de la fonction $z_p : x \mapsto \dfrac{2}{i-3}e^{ix}$. On écrit

$$\frac{2}{i-3}e^{ix} = -\frac{3+i}{5}e^{ix},$$

on en déduit que $y_p : x \mapsto -\dfrac{3}{5}\sin x - \dfrac{1}{5}\cos x$.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{3}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 25 Exprimons les dérivées de $z : t \mapsto y(\tan(t))$ en fonction de celles de y. On a :

$$z' : t \mapsto (1 + \tan^2 t)y'(\tan(t)) \text{ et}$$
$$z" : t \mapsto (1 + \tan^2 t)y"(\tan(t)) + 2\tan(t)\left(1 + \tan^2 t\right) y'(\tan(t)).$$

On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & y \text{ est solution de l'équation } (1+x^2)^2y" + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)^2y"(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + 4y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \\ & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \left(1+\tan^2(t)\right)^2 y"(\tan(t)) + 2\tan(t)(1+\tan^2(t))y'(\tan(t)) + 4y(\tan(t)) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, z"(t) + 4z(t) = 0 \text{d'après les calculs faits ci-dessus} \end{array}$$

Résolvons cette équation. Son équation caractéristique admet $\pm 2i$ pour racines donc les solutions sont $z : t \mapsto \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On sait que z est solution de l'équation $z"(t) + 4z(t) = 0$ si et seulement si $y : x \mapsto z(\arctan(x))$ est solution de $(1 + x^2)^2 y" + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \alpha\cos(2\arctan(x)) + \beta\sin(2\arctan(x)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On va simplifier leurs expressions. On écrit :

$$\cos(2\arctan(x)) = 2\cos^2\arctan(x) - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2\arctan(x)} - 1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

et

$$\sin(2\arctan(x)) = 2\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) = 2\tan(\arctan(x))\cos^2(\arctan(x)) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\alpha(1 - x^2)}{1 + x^2} + \frac{2\beta x}{1 + x^2}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 26 Exprimons les dérivées de $z : t \mapsto y(e^t)$ en fonction de celles de y.

On a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z"(t) = e^{2t} y"(e^t) + e^t y'(e^t)$.

On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & y \text{est solution de } x^2y" + 3xy' + y = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, x^2 y"(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t}y"(e^t) + 3e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0 \\ \Leftrightarrow & z \text{ est solution de } z" + 2z' + z = 0 \text{d'après les calculs faits ci-dessus} \end{array}$$

Résolvons $z" + 2z' + z = 0$. Les solutions sont les fonctions

$$t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On sait que z est solution de $z" + 2z' + z = 0$ si et seulement si $y : x \mapsto z(\ln x)$ est solution de $x^2y" + 3xy' + y = 0$, on en déduit que les solutions de l'équation homogène sont

$$x \mapsto \frac{(\alpha\ln x + \beta)}{x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y"_p(x) = 2a$ donc y_p est solution si et seulement si $9ax^2 + 4bx + c = x^2 + 2x + 1$. Par unicité des coefficients, on trouve $a = \dfrac{1}{9}, b = \dfrac{1}{2}$ et $c = 1$. On en déduit que les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{1}{9}x^2 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{(\alpha\ln x + \beta)}{x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 27 On a $z'(t) = e^t y(e^t)$ et $z"(t) = e^{2t}y"(t) + e^t y'(e^t)$. On a donc

$$\begin{array}{rl} y \text{ solution de E sur } \mathbb{R}^{+*} & \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, ae^{2t}y"(e^t) + be^t y'(z^t) + cy(e^t) = 0 \\ & \Leftrightarrow az"(t) + (b - a)z'(t) + cz(t) = 0. \end{array}$$

Les solutions de cette dernière équation dépendent du signe du discriminant : $(b - a)^2 - 4ac$. Si on note S l'ensemble des solutions de cette équation à coefficients constants, l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}^{+*}$ est $\{z(\ln x), z \in S\}$.

Pour déterminer les solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$, on remarque que $(y(-x))' = -y'(-x)$ et $(y(-x))" = y"(-x)$. On a donc :

$$ax^2y"(x) + bxy(x) + cy(x) = 0 \Leftrightarrow a(-x)^2 (y(-x))" + (-x)(y(-x))' + cy(-x) = 0.$$

On en déduit que $y(x)$ solution sur $\mathbb{R}^{-*}$ si et seulement si $y(-x)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On applique ce qu'on vient de faire à $x^2y" - xy' + y = 0$. D'après ce qui précède, y est une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution de l'équation $z" - 2z' + z = 0$. Les solutions sont les fonctions

$$t \mapsto (\alpha t + \beta)e^t, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de l'équation, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ sont :

$$x \mapsto (\alpha\ln|x| + \beta)x, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 28 Soit f une solution. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)f'(x) = 1$, f et f' ne s'annulent pas. On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$ donc f' est dérivable. On peut dérive l'équation fonctionnelle:

$$-f'(-x)f'(x) + f(-x)f"(x) = 0,$$

se qui se réécrit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f"(x)}{f'(x)},$$

car $f'(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

On intègre l'égalité $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{f"}{f'}$, on obtient l'existence d'un réel K tel que :

$$\ln|f'(x)| = \ln|f(x)| + K.$$

On sait que f et f' ne s'annulent pas et sont continues, elles sont donc de signes constants. En passant à l'exponentielle et posant $\lambda = \pm e^K$ selon le signe de ff', on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda f(x).$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto \mu e^{\lambda x}$. On doit donc chercher les solutions de l'équation fonctionnelle parmi les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \mu e^{\lambda x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

En injectant dans l'équation, on voit que $f(-x)f'(x) = \lambda\mu^2$. On doit donc avoir $\lambda\mu^2 = 1$, ce qui impose $\lambda = \dfrac{1}{\mu^2}$.

Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \mu e^{x/\mu^2}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction 29 Pour $m = 0$, on trouve $x \mapsto (ax+b)e^{-x}+1$. Pour $m \neq 0$, on trouve $x \mapsto \dfrac{m}{\sqrt{m^2+2}} \sin\left(2mx\sqrt{m^2+2}\right) + \cos(mx) - 2m\sin(mx)$

Correction 30 1. On pose $z(t) = y(e^t)$, alors y est solution de l'équation ci-dessus si et seulement si z est solution de

$$z\text{"} - z'(t) + z(t) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions :

$$t \mapsto e^{t/2}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right), \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle sont :

$$x \mapsto \sqrt{x}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right), \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle. Alors f' est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$. On peut donc dériver l'égalité et On dérive l'égalité, on obtient :

$$f\text{"}(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

c'est-à-dire :

$$f\text{"}(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) \Leftrightarrow x^2 f\text{"}(x) + f(x) = 0.$$

Comme $x \in \mathbb{R}^{+*}$, cette équation est équivalente à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{2t} y\text{"}(e^t) + y(e^t) = 0.$$

On a montré à la question précédente, que les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sqrt{x}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right), \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons parmi ces solutions, lesquelles vérifient $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \sqrt{x}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2x} \alpha \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\sqrt{3}}{2x} \beta \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right. \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right), \end{aligned}$$

et

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x - \beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut donc $\alpha = \sqrt{3}\beta$. On en déduit que les solutions de l'équation fonctionnelle sont les fonctions :

$$x \mapsto \beta\sqrt{x}\left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right), \ \beta \in \mathbb{R}.$$

Correction 31 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Correction 32 $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\tfrac{1}{t}\right]_1^2 = \tfrac{1}{2}$.

Correction 33 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \,\mathrm{d}t = -\left[\ln(\cos t)\right]_0^{\frac{pi}{4}} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$.

Correction 34 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $u'.u^3$, on a donc :

$$\int^t \sin^3 x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \sin^4 t.$$

Correction 35 On écrit : $\dfrac{\cos^3 x}{\sin^5 x} = \dfrac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin^5 x} = \dfrac{\cos x}{\sin^5 x} - \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$. On a donc :

$$\int^t \frac{\cos^3 x \,\mathrm{d}x}{\sin^5 x} = \frac{-1}{4\sin^4 t} + \frac{1}{2\sin^2 t} = \frac{2\sin^2 t - 1}{4\sin^4 t}.$$

Correction 36 On écrit $\sin^2 x\cos^3 x = \sin^2 x\cos x(1-\sin^2 x) = \cos x\sin^2 x - \cos x\sin^4 x$. On a alors : $\int^t \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int^t \cos x\sin^2 x\,\mathrm{d}x - \int^t \cos x\sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{1}{5}\sin^5 t$.

Correction 37 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$

Correction 38 On écrit :

$$\frac{2t}{t+2} = \frac{2t+4-4}{t+2} = 2 - \frac{4}{t+2}$$

d'où

$$\int_1^2 \frac{2t}{t+2}dt = [2t - 4\ln|t+2|]_0^1 = 2 - 4\ln(3) + 4\ln(2)$$

Correction 39 On écrit $\frac{t}{1+2t} = \frac{(2t+1)-1}{2(1+2t)}$. On a alors :

$$\int^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \int^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+2t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln|1+2x|.$$

Correction 40 On écrit :

$$\int^t \frac{1+e^x\,\mathrm{d}x}{1-e^x} = \int_0^t \frac{2e^x+1-e^x}{1-e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^t \left(\frac{2e^x}{1-e^x}+1\right)\mathrm{d}x = -2\ln|e^t-1| + t.$$

Correction 41 $\int^x t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int_0^x \frac{t^2}{2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2}$.

Correction 42 On fait une intégration par parties avec $u = \arctan t, v' = 1$ donc $v = t$ et $u' = \frac{1}{1+t^2}$. On a $\int_0^1 \arctan t = [t\arctan t]_0^1 - \frac{t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Correction 43 On écrit $\frac{x^2+2x}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}$.

On a donc $\int^t \frac{x^2+2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = t - \arctan(t) + \ln(1+t^2)$.

Correction 44 On a $t^2-2t-3 = (t+1)(t-3)$ d'où $\frac{1}{t^2-2t-3} = \frac{1}{4(t-3)} - \frac{1}{4(t+1)}$. On écrit alors

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t-3} = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{4(t-3)} - \int^x \frac{\mathrm{d}t}{4(t+1)} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|.$$

Correction 45 On a $\frac{1}{t^2-4t+4} = \frac{1}{(t-2)^2}$ d'où $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4t+4} = -\frac{1}{x-2}$.

Correction 46 On écrit $\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x/\sqrt{3})^2+1}$. On pose $u = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $dx = \sqrt{3}du$ donc $\int^t \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\int^u \frac{\mathrm{d}t/\sqrt{3}}{u^2+1} = \frac{\arctan(t/\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Correction 47 On travaille sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont $t \mapsto \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous forme polynomiale $y_p : t \mapsto at^2+bt+c$. On a $y_p'(t) = 2at+b$ donc y_p est solution si et seulement si $2at+b-at^2-bt-c = t^2$. On identifie les coefficients des deux membres et on résout le système:

$$\begin{cases} -a = & 1 \\ 2a-b = & 0\,. \\ b-c = & 0 \end{cases}$$

On trouve $y_p : t \mapsto -(t^2+2t+2)$, les solutions de l'équation sont donc $t \mapsto \lambda e^t - (t^2+2t+2), \lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 48 On travaille sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{3x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(1+x^2)$; Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 49 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x(x-1)$ ne s'annule pas. On pose $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0,1[$ et $I_3 =]1,+\infty[$. On travaille sur I_i. Pour trouver les solutions de l'équation homogène associée, on doit déterminer une primitive de $\frac{x+1}{x(1-x)}$ ce que l'on a fait à l'exercice 13. On a $\int^x \frac{(t+1)dt}{t(1-t)} = \ln\left|\frac{x}{(x-1)^2}\right|$. On en déduit que les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda x}{(x-1)^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la solution égale à $x \mapsto \frac{x}{2}$ est une solution évidente.

Les solutions, sur I_i, de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\lambda x}{(x-1)^2} + \frac{x}{2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque. *Si on ne voit pas la solution évidente, on peut la trouver par la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière sous la forme* $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)x}{(x-1)^2}$*. La fonction* y_p *est solution de l'équation si et seulement si* $\dfrac{\lambda'(x)x^2}{x-1} = x^2$ *ce qui est vrai lorsque* $\lambda(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2}$*. On retrouve la solution particulière* $x \mapsto \dfrac{x}{2}$.

Si on intègre $\lambda(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x$*, on va se retrouver avec* $y_p(x) = \dfrac{(x^2-2x)x}{2(x-1)^2}$*. ce qui est correct (mais moins joli) puisque l'on a*

$$\frac{(x^2-2x)x}{2(x-1)^2} = \frac{(x^2-2x+1)x - x}{2(x-1)^2} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2(x-1)^2},$$

avec $x \mapsto \dfrac{-x}{2(x-1)^2}$ *solution de l'équation homogène.*

Correction 50 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^\star$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^\star$; Les solutions de l'équation homogène sur I_i sont $x \mapsto \lambda_i x^2$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Une solution évidente est $x \mapsto \dfrac{x^4}{4}$. Les solutions sur I_i sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda_i x^2 + \dfrac{x^4}{2}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Correction 51 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x(1+x^2)$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^\star$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^\star$. On écrit $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x^2)}$ est $x \mapsto \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
Les solutions sur I_i sont alors : $x \mapsto \dfrac{\lambda_i x}{\sqrt{1+x^2}}, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Correction 52 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^\star$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^\star$. Les solutions de l'équation homogène sur I_i sont $x \mapsto \dfrac{\lambda_i}{x}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \dfrac{\lambda'(x)}{x}$. On a alors $\lambda'(x) = \cos(x)$ d'où $\lambda(x) = \sin(x)$. Les solutions sur I_i sont $x \mapsto \dfrac{\lambda_i + \sin(x)}{x}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Correction 53 On travaille sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\cos(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme y_p : $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{\cos(x)}$. On trouve $\lambda'(x) = 1$ donc $\lambda(x) = x$. Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{\cos(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut $y(0) = 1$, on doit donc prendre $\lambda = 1$ et l'unique solution cherchée est $x \mapsto \dfrac{1+x}{\cos(x)}$.

Correction 54 Les solutions de l'équation caractéristique sont $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Une solution évidente est la solution constante égale à 1, les solutions sont donc :
$$x \mapsto 1 + e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$
2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax+b)e^{-2x}$. On a $y_p'(x) = (-2ax + a - 2b)e^{-2x}$ et $y_p"(x) = (4ax + 4b - 4a)e^{-2x}$. La fonction y_p est solution de l'équation si et seulement si $(3ax + 3b - 3a)e^{-2x} = xe^{-2x}$. On résout le système obtenu en identifiant les coefficients et on trouve $a = b = \dfrac{1}{3}$, les solutions sont donc :
$$x \mapsto \frac{1}{3}(x+1)e^{-2x} + e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$
3. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p"(x) = 2a$. La fonction y_p est solution de l'équation si et seulement si $ax^2 + (b+2a)x + c + b + 2a = x^2 + 3x + 4$. On identifie les coefficients des deux membres et on trouve $a = b = c = 1$ dont les solutions sont :
$$x \mapsto x^2 + x + 1 + e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$
4. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On remarque qu'une fonction z à valeurs complexes est solution de $z"(x) + z'(x) + z(x) = e^{jx}$ si et seulement si sa partie réelle est solution de $y"(x) + y'(x) + y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. Nous allons donc

résoudre l'équation différentielle complexe. On remarque que j est solution de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière sous la forme $z_p(x) = axe^{jx}$. On a $z_p'(x) = (a + jax)e^{jx}$ et $z"_p(x) = (j^2ax + 2ja)e^{jx}$. On a :

$$\begin{aligned} z_p"(x) + z_p'(x) + z_p(x) = e^{jx} &\Leftrightarrow \left((j^2a + ja + a)x + (a + 2ja)\right)e^{jx} = e^{jx} \\ &\Leftrightarrow (a + 2ja)e^{jx} = e^{jx} \text{car } 1 + j + j^2 = 0 \text{ d'après les propriétés des racines } n\text{-ièmes de l'unité.} \end{aligned}$$

On en déduit que $a = \dfrac{1}{1+2j} = \dfrac{1}{i\sqrt{3}} = -\dfrac{i}{\sqrt{3}}$.

On a donc $z_p(x) = -\dfrac{i}{\sqrt{3}}e^{jx}$, on en déduit qu'une solution particulière de l'équation $y"(x) + y'(x) + y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ et les solutions sont:

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^{-x/2} + e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 55 L'équation caractéristique a pour racine $-1 \pm 2i$, les solutions de l'équation homogène sont donc :

$$x \mapsto e^{-x}\left(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. On trouve $x - \dfrac{2}{5}$. Les solutions sont donc :

$$x \mapsto x - \frac{2}{5} + e^{-x}\left(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\right), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 56 Les racines de l'équation caractéristique sont -1 et $\dfrac{1}{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc :

$$x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{x/3}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $\alpha\cos x + \beta\sin x$. On trouve $\alpha = \dfrac{1}{5}$ et $\beta = -\dfrac{1}{10}$. Les solutions sont donc :

$$x \mapsto \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x + \alpha e^{-x} + \beta e^{x/3}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On peut également préférer chercher une solution particulière complexe de l'équation $-3z" - 2z' + z = e^{ix}$. On cherche z_p sous la forme $z_p(x) = \lambda e^{ix}$, on a z_p solution si et seulement si $(3 - 2i + 1)\lambda = 1$ donc $\lambda = \dfrac{1}{4-2i} = \dfrac{2+i}{10}$ et $z_p(x) = \dfrac{2+i}{10}e^{ix} = \dfrac{1}{10}\left(2\cos(x) - \sin(x) + i\cos(x) + 2i\sin(x)\right)$ Une solution particulière de $-3y" - 2y' + y = \cos(x)$ est la partie réelle de $z_p(x)$ soit $y_p = \dfrac{1}{10}\left(2\cos(x) - \sin(x)\right)$. On retrouve bien la même solution particulière.

Correction 57 L'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$ donc les racines sont 1 et -3 donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p"(x) = 2a$. La fonction y_p est solution si et seulement si

$$-3ax^2 + (4a - 3b)x + 2a + 2b - 3c = x^2$$

ce qui impose $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = -\dfrac{4}{9}$ et $c = -\dfrac{14}{27}$. Les solutions sont donc les fonctions

$$x \mapsto -\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{9} - \frac{14}{27} + \lambda e^x + \mu e^{-3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 58 L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, mu) \in \mathbb{R}^2$.

On peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$. On a $y_p'(x) = -\alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$ et $y"_p(x) = -\alpha\cos(x) - \beta\sin(x)$. On a donc y_p solution si et seulement si

$$(\alpha - 3\beta)\cos(x) + (\beta + 3\alpha)\sin(x) = \cos(x) + \sin(x),$$

donc

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

On obtient $\alpha = \dfrac{2}{5}$ et $\beta = -\dfrac{1}{5}$. Une solution particulière est donc

$$y_p(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x).$$

On peut aussi utiliser le principe de superposition pour dire que si z_p est solution de $z" - 3z' + 2z = e^{ix}$, alors $y_p = \mathcal{R}e(z_p) + \mathcal{I}m(z_p)$ est solution de l'équation étudiée.

On cherche donc une solution z_p de $z" - 3z' + 2z = e^{ix}$ sous la forme λe^{ix}, on a z_p solution si et seulement si $(1 - 3i)\lambda = 1$ donc $\lambda = \dfrac{1}{1-3i} = \dfrac{1+3i}{10}$. On a alors

$z_p(x) = \frac{1+3i}{10}e^{ix} = \frac{1}{10}\left(\cos(x) - 3\sin(x) + 3i\cos(x) + i\sin(x)\right)$. Ainsi,

$$y_p(x) = \frac{1}{10}\left(\cos(x) - 3\sin(x)\right) + \frac{1}{10}\left(3\cos(x) + \sin(x)\right) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$$

On retrouve bien la même solution particulière.

On en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 59 L'équation caractéristique $r^2 + r = 0$ a pour racines 0 et -1, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto (ax+b)e^x$. On a $y_p'(x) = (ax + a + b)e^x$ et $y"_p(x) = (ax + 2a + b)e^x$. La fonction y_p est donc solution de l'équation si et seulement si $(3a + 2b + 2ax)e^x = 2xe^x$ c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3a + 2b & = & 0 \\ 2a & = & 1 \end{array}\right.$$

On trouve $a = 1$ et $b = -\frac{3}{2}$. Une solution particulière est donc $x \mapsto \left(x - \frac{3}{2}\right)e^x$ et les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto \left(x - \frac{3}{2}\right)e^x + \lambda + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 60 1. On pose $z(t) = y(e^t)$. On a alors :

$$z'(t) = e^t y'(e^t)$$

et

$$z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(t).$$

On a :

$$\begin{aligned} & x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique de :

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$$

est :

$$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

Elle possède une racine double donc les solutions de $z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$t \mapsto (at+b)e^{-t},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de $x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$x \mapsto (a\ln x + b)e^{-\ln x},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

ce qui se réécrit :

$$x \mapsto \frac{(a\ln x + b)}{x},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Si une solution polynômiale existe, notons ax^n son terme dominant. Le terme dominant de $x^2y''(x)$ est :

$$n(n-1)ax^{n-2}x^2 = n(n-1)ax^n.$$

Le terme dominant de $3xy'(x)$ est $3nax^n$ et celui de $y(x)$ est ax^n. On doit donc avoir :

$$n(n-1)ax^n + 3nax^n + ax^n = 3x^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} n(n-1) + 3n + 1 &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

il faut donc $n = 2$. On cherche donc une solution polynômiale sous la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$. On a :

$$y_p \text{ solution } \Leftrightarrow 9ax^2 + 4bx + c = 3x^2 + 4x + 1.$$

Par identification, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = 1. \end{array}\right.$$

3. D'après les deux questions précédentes, on en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$x \mapsto \frac{(a\ln x + b)}{x} + \frac{x^2}{3} + x + 1,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 61 1. Soit $n \geqslant 2$, alors en faisant deux intégrations par parties, on trouve

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$$

Pour $n \geqslant 4$, on a donc

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)n(-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)I_{n-4}$$

Par récurrence descendante, on obtient, :

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-(2k+1)} \frac{(2p)!}{(2p-(2k+1))!} + (-1)^p (2p)! I_0,$$

et

$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2k} \frac{(2p+1)!}{(2p-2k)!} + (-1)^p (2p+1)! I_1,$$

avec $I_0 = I_1 = 1$.

Correction 62 1. On pose $v'(t) = t^p$ et $u(t) = (1-t)^q$. On a $u'(t) = -q(1-t)^{q-1}$ et $v(t) = \frac{1}{p+1} t^{p+1}$. On a donc

$$I(p,q) = \left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1}\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

2. On a $I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$ donc

$$I(p+1, q-1) = \frac{p+1}{q} I(p,q) = \frac{p+1}{q}\frac{p}{q+1} I(p-1, q+1),$$

et, par récurrence descendante :

$$I(p+1, q-1) = \frac{p+1}{q} \times \frac{p}{q+1} \times \ldots \times \frac{1}{q+p} I(0, q+p).$$

Comme $I(0, q+p) = \int_0^1 (1-t)^{q+p}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{q+p+1}}{q+p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$, on obtient:

$$I(p+1, q-1) = \frac{p+1}{q} \times \frac{p}{q+1} \times \ldots \times \frac{1}{q+p} \times \frac{1}{q+p+1} = \frac{(p+1)!}{\prod_{k=q+1}^{q+p+1} k},$$

donc

$$I(p+1, q-1) = \frac{(p+1)!(q-1)!}{(p+q+1)!}.$$

On en déduit que

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Correction 63 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x(x^2-1)$ ne s'annule pas. On pose $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ et $I_4 =]1, +\infty[$.

On a $\frac{1}{x(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$, donc

$$\int \frac{2dx}{x(x^2-1)} = -2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| = \ln\left(\frac{|x^2-1|}{x^2}\right).$$

Les solutions de l'équation homogène sur I_i, $i = 1..4$, sont

$$x \mapsto \frac{\lambda_i x^2}{x^2-1}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante sous la forme $y_p(x) = \frac{\lambda(x)x^2}{x^2-1}$. Cela impose $y_p'(x) = \frac{1}{x}$ donc $y_p(x) = \frac{\ln|x|x^2}{x^2-1}$. Les solutions sur I_i sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda_i x^2 + x^2\ln|x|}{x^2-1}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Correction 64 Comme suggéré dans l'énoncé, on exprime les dérivées de $z : t \mapsto y(e^t)$ en fonction de celles de y.

On a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z"(t) = e^{2t}y"(e^t) + e^t y'(e^t)$. On remarque que :

$$\begin{array}{rl} & y \text{est solution de } x^2y" + 3xy' + 4y = 7x\ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, x^2y"(x) + 3xy'(x) + 4y(x) = 7x\ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t}y'(e^t) + 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 7te^t \\ \Leftrightarrow & z \text{ est solution de } z" + 2z' + 4z = 7te^t \end{array}$$

Nous allons résoudre cette équation. On commence par résoudre l'équation homogène. Son équation caractéristique $r^2 + 2r + 4 = 0$ a pour racines $-1 \pm i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$t \mapsto e^{-t}(a\cos\sqrt{3}t + b\sin\sqrt{3}t), (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $z_p : t \mapsto (at+b)e^t$ car 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $z_p'(t) = (at+a+b)e^t$ et $z_p"(t) = (at+2a+b)e^t$. La fonction z_p est solution de l'équation $z" + 2z' + 4z = 7te^t$ si et seulement si

$$7at + 7b + 4a = 7t.$$

En identifiant les coefficients, on obtient $a = 1$ et $b = -\frac{4}{7}$. Les solutions de l'équation $z" + 2z' + 4z = 7te^t$ sont donc les fonctions :

$$t \mapsto e^{-t}(a\cos\sqrt{3}t + b\sin\sqrt{3}t) + \left(t - \frac{4}{7}\right)e^t, (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

On sait que z est solution de $z"+2z'+4z=7te^t$ si et seulement si $y : x\mapsto z(\ln(x))$ est solution de $x^2y"+3xy'+4y=7x\ln(x)$.

On en déduit que les solutions de $x^2y"+3xy'+4y=7x\ln(x)$ sont les fonctions :

$$x\mapsto \frac{1}{x}(a\cos(\sqrt{3}\ln x)+b\sin(\sqrt{3}\ln x))+x(\ln x-\frac{4}{7}),(a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Correction 65 On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $y_p(x)=ax$. Une telle fonction est solution si et seulement si

$$a-\frac{ax}{x}-a^2x^2=-9x^2$$

ce qui impose $a^2=9$. On choisit $y_p(x)=3x$ comme solution particulière.

Faisons maintenant le changement de fonction inconnue suivant : $y(x)=3x-\frac{1}{z(x)}$ où z est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. Commençons par exprimer les dérivées de y en fonction de celles de z: On a :

$$y'(x)=3+\frac{z'(x)}{z^2(x)} \text{ et } y^2(x)=9x^2-\frac{6x}{z(x)}+\frac{1}{z^2(x)},$$

donc y est solution de $y'(x)-\frac{y(x)}{x}-y(x)^2=-9x^2$ si et seulement si

$$3+\frac{z'(x)}{z^2(x)}-3+\frac{1}{xz(x)}-9x^2+\frac{6x}{z(x)}-\frac{1}{z^2(x)}=9x^2,$$

Après simplification, on obtient y est solution de $y'(x)-\frac{y(x)}{x}-y(x)^2=-9x^2$ si et seulement si z est solution de : $z'(x)+\left(6x+\frac{1}{x}\right)z(x)=1$. Résolvons cette équation. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x\mapsto\frac{\lambda}{x}e^{-3x^2},\lambda\in\mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(x)=\frac{\lambda(x)e^{-3x^2}}{x}$. La fonction z_p est solution de l'équation si et seulement si $\lambda'(x)=xe^{3x^2}$ d'où $z_p(x)=\frac{1}{6x}$. Ainsi, les solutions de l'équation $z'(x)+\left(6x+\frac{1}{x}\right)z(x)=1$ sont les fonctions $x\mapsto\frac{1}{6x}+\frac{\lambda}{x}e^{-3x^2},\lambda\in\mathbb{R}$. La fonction z ne doit pas s'annuler sur $\mathbb{R}_+^\star$. L'équation $1+6\lambda e^{-3x^2}=0$ n'a pas de solution pour $\lambda=0$ et, pour $\lambda\neq 0$, elle est équivalente à $e^{-3x^2}=-\frac{1}{6\lambda}$. Comme $e^{-3x^2}\in]0,1]$, elle n'a pas de solution si $\lambda>-\frac{1}{6}$.

On en déduit que les solutions de $y'(x)-\frac{y(x)}{x}-y(x)^2=-9x^2$ sont les fonctions $x\mapsto 3x-\dfrac{6x}{1+6\lambda e^{-3x^2}}$ avec $\lambda\in\left]-\frac{1}{6},+\infty\right[$.

Correction 66 Soit y une solution non-nulle.

1. si y ne s'annule pas, on a alors $\dfrac{y'}{\sqrt{y}}=1$ donc il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $2\sqrt{y}=x+b$ donc $y=\left(\dfrac{x+b}{2}\right)^2$. On obtient une contradiction car $x\mapsto\left(\dfrac{x+b}{2}\right)^2$ s'annule.
2. Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $y(a)=0$. On sait que y est croissante puisque y' est positive, donc, si $x\leqslant a$, on a:
$$y(x)\leqslant y(a)=0,$$
ce qui implique $y(x)\leqslant 0$. Or y est positive (puisqu'on considère sa racine carrée), donc cela implique $y(x)=0$.
3. Notons K l'ensemble des points d'annulation de la fonction. On sait donc que K est non-vide d'après la question 1. Supposons par l'absurde qu'il ne soit pas majoré. Soit M un réel quelconque, alors on peut trouver $A>M$ tel que $A\in K$ (puisque K non majoré). On a alors $y(M)=0$ d'après la question précédente donc $M\in K$. Ainsi, si K est non majoré, alors $\mathbb{R}\subset K$ donc $K=R$. Or si $K=\mathbb{R}$, la fonction s'annule sur tout $\mathbb{R}$ ce qui contredit l'hypothèse que y n'est pas la solution nulle. On a montré que K est majoré.
4. On note $c=\sup K$. On se place sur $]c,+\infty[$. La fonction y ne s'annule pas donc, d'après le travail effectué dans la première question, il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que
$$y|_{]c,+\infty[} : x\mapsto\left(\frac{x+b}{2}\right)^2.$$
La fonction y étant dérivable, elle est continue. On doit donc avoir $\lim\limits_{x\to c^-}y(x)=\lim\limits_{x\to c^+}y(x)$. On a
   - $\lim\limits_{x\to c^-}y(x)=0$ et
   - $\lim\limits_{x\to c^+}y(x)=\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2$

   On en déduit que $c=-b$.

   Par définition de c, on a alors
$$y : x\mapsto\begin{cases}\left(\dfrac{x-c}{2}\right)^2 & \text{si } x>c\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme
$$y : x\mapsto\begin{cases}\left(\dfrac{x-c}{2}\right)^2 & \text{si } x>c\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

Correction 67 On commence par remarquer que pour $x = y = 0$, on obtient $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou 1. Si $f(0) = 0$, alors pour $y = 0$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = f(x+0) + f(x-0) = f(0)f(x) = 0,$$

donc f est nulle.

Si f est une solution non nulle, on a $f(0) = 1$. Dérivons deux fois l'équation fonctionnelle par rapport à y. On obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f"(x+y) + f"(x-y) = 2f(x)f"(y).$$

Pour $y = 0$, on obtient $f"(x) = f(x)f"(0)$.

Ainsi, les solutions de l'équation fonctionnelle sont solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 de la forme $y" = Ky$. Les solutions d'une telle équation sont de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$ si $K = 0$ et

$$x \mapsto \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax} \text{ ou } x \mapsto \alpha \cos(ax) + \beta \sin(ax),$$

avec $a = \sqrt{\pm K}$ selon que K est positif ou négatif.

Cherchons maintenant, parmi ces solutions, celles qui sont effectivement solutions de l'équation fonctionnelle. On sait déjà qu'une solution non nulle f vérifie $f(0) = 1$. En dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à y on obtient $f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$ puis pour $x = y = 0$, $f'(0)f(0) = 0$ ce qui impose, puisque $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

Si $f : x \mapsto \alpha x + \beta$, alors $f(0) = \beta = 0$ et $f'(0) = \alpha = 0$ ce qui impose $f : x \mapsto 1$.

Si $f : x \mapsto \alpha e^{ax} + \beta e^{-a}$, on a $f(0) = 1$ donc $\alpha + \beta = 1$ et $f'(0) = 0 = \alpha - \beta$. On a donc $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ donc $f : x \mapsto \mathrm{ch}(ax)$.

Si $f : \alpha \cos(ax) + \beta \sin(ax)$, on a $f(0) = \alpha = 1$ et $f'(0) = \beta = 0$ donc $f : x \mapsto \cos(ax)$.

En conclusion, les solutions sont la fonction nulle, la fonction constante égale à 1 et les fonctions de la forme $x \mapsto \cosh(ax), \alpha > 0$ et $x \mapsto \cos(ax)$, avec $a > 0$.