

TD 9: Suites.

1 Comparaison des suites

Exercice 1.

Comparer (à l'aide de o et $\sim$) les suites suivantes:

- | | |
|---------------------------|---|
| 1. $u_n = n + 1, v_n = n$ | 3. $u_n = \ln n, v_n = n$ |
| 2. $u_n = n^2, v_n = n$ | 4. $u_n = \sin(\frac{1}{n}), v_n = \frac{1}{n}$ |

Exercice 2.

Donner des équivalents simples (sans somme) des termes généraux suivants :

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $\cos\left(\frac{1}{n}\right).$ | 3. $(n + \sqrt{n})^a - n^a$ où a est un réel non nul |
| 2. $2^n + n^{10^4}$ | |

2 Vrai/Faux

Exercice 3.

Vrai/Faux? On donnera une justification lorsque c'est juste, un contre-exemple lorsque c'est faux.

- Si une suite converge vers 0 et est de premier terme strictement positif, alors elle est strictement décroissante.
- Si une suite est strictement décroissante et positive, alors elle converge vers 0.
- Si une suite diverge vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et ne s'annule pas, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$ ou $\frac{1}{u_n} \rightarrow -\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ssi : $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)(|u_n - l| \leq \epsilon)$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ssi : $(\forall \epsilon \geq 0)(\exists N)(\forall n \geq N)(|u_n - l| \leq \epsilon)$.
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers l et l' et que $l \leq l'$, alors à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.

3 Convergence et calcul de limites

Exercice 4.

Les suites suivantes sont-elles convergentes?

- | | |
|------------------------------|---|
| 1. $u_n = 1 + (-1)^n.$ | 3. $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$ |
| 2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$ | 4. $u_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}.$ |

Exercice 5.

Calculer, lorsqu'elle existe, la limite des suites définies par :

$$u_n = n - \sqrt{n^2 - n} \quad v_n = \frac{\sin n^2 - \cos n^3}{n} \quad w_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$$

$$a_n = \frac{n^3 + 2^n}{3^n} \quad b_n = (\cos n) \sin \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 6.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ est convergente et calculez sa limite.

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 7$.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 8.

Pour tout entier n , on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 9.

Montrer que la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{n+1} u_n^2$ admet une limite qu'on déterminera.

4 Expression du terme général

Exercice 10.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)^2.$$

Exercice 11.

Déterminer la limite de toute suite réelle vérifiant $2(v_{n+1} - v_{n+2}) = v_n$.

Exercice 12.

Soit la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 4$. Trouver $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que la suite définie par $v_n = u_n + \gamma$ vérifie $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$. En déduire une expression de u_n pour tout n .

Exercice 13.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique. En déduire une expression de u_n pour tout n .

5 Suites récurrentes**Exercice 14.**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq \sqrt{2}$.
2. Puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{2}|^2}{2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$ et donner la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 15.

Étudier la nature de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{(1 + u_n)^4}$ en fonction de la valeur de u_0 .

Exercice 16.

Étudier la suite définie par $u_0 \geq 1$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$ en fonction de la valeur de u_0 .

6 Exercices plus théoriques**Exercice 17.**

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(x_n) + x_n = n$. Montrer que la suite est bien définie et déterminer la nature de la suite.

Exercice 18.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $\sum_{k=1}^n x_n^k = 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer qu'elle est minorée par $1/2$.

4. Montrer qu'elle converge vers $1/2$.

Exercice 19.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 20.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dont les coefficients sont entiers. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer qu'elle est stationnaire.

Exercice 21.

Pour n un entier naturel non nul, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Vérifiez que $\forall n \geq 1, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ et que H est croissante.
2. Déduisez-en simplement que $H_n \rightarrow +\infty$.
3. On admet que $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers γ . Déterminer la limite de $(H_{2n} - H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 22. ⚙️

Pour tout entier r supérieur ou égal à 2 et tout entier naturel non nul n , on note :

$$S_n(r) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r}$$

1. En remarquant que, $k^{-r} \leq (k-1)^{-1} - k^{-1}$ (pour r et k à préciser), montrez que la suite $(S_n(r))_n$ converge, pour tout entier $r \geq 2$.
2. On note σ_r la limite de la suite précédente. Montrez que la suite $(\sigma_r)_r$ est décroissante.
3. (a) Vérifiez que $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^r} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^r}$.
Déduisez-en : $\forall n \geq 2, 1 \leq S_n(r) \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^r}$.
(b) Montrez que : $\forall r \geq 2, 1 \leq \sigma_r \leq 1 + \frac{1}{r-1}$.
Déduisez-en la limite de σ .

7 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 23.

Donner des équivalents simples (sans somme) des termes généraux suivants :

$$\left. \begin{array}{l} 1. n^2 - \ln(n) + e^{1/n} \\ 2. 2^n - e^n + \ln(n) - \cos(3n^2) \end{array} \right| \quad 3. \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Exercice 24.

Les suites suivantes sont-elles convergentes?

$$\left. \begin{array}{l} 1. u_n = \frac{n+1}{n^2+3}. \\ 2. u_n = \frac{e^n}{n}. \end{array} \right|$$

Exercice 25.

Soit $a > 0$. Calculer, lorsqu'elle existe, la limite des suites définies par :

$$u_n = \sqrt{n(n+a)} - n \quad v_n = \frac{n}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad w_n = \cos\left(\frac{2^n}{n!}\right) \quad z_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}$$
$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+3} \quad b_n = \frac{n^3 \sin \frac{1}{n}}{n^2 + 3n - 1} \quad c_n = n^4 \ln(1 + e^{-n}).$$

Exercice 26.

Déterminez les limites des suites $u_n = n^{1/n}$ et $v_n = (a^n + b^n)^{1/n}$, où a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

Exercice 27.

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sqrt{n} \left\lfloor \frac{\lfloor n\sqrt{n} \rfloor}{n} \right\rfloor$.

Exercice 28.

Montrer que la suite de terme général $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 29.

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2} dx$.

Exercice 30.

Déterminer la nature de la suite de terme général $v_n = \frac{\lfloor \frac{1}{n} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rfloor}{\sqrt{n}}$.

Exercice 31.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 32.

Donner une expression en fonction de n de la suite définie par $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.

Exercice 33.

Donner une expression pour tout n de la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

Exercice 34.

Déterminer une expression du terme général de la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}.$$

Exercice 35.

Déterminer une expression du terme général de la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 2$.

Exercice 36.

Déterminer une expression du terme général de la suite définie par $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = n(n+1)u_n$$

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 37. 🌀

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite monotone. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ est monotone, de même sens de monotonie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 38.

La suite de terme général $u_n = \lfloor \lfloor \sqrt{n} \rfloor - \sqrt{n} \rfloor$ admet-elle une limite?

Exercice 39. 🌀

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1}$ en fonction de la valeur de u_0 .

Exercice 40.

Soit $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $e^{x_n} + x_n = \frac{1}{n+1}$.

1. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Montrer qu'elle converge.

Exercice 41.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n^3 + x_n = \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite

Exercice 42.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ et (E) l'équation $\tan(x) = x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + v_n$.

Exercice 43.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle. On note u_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

Exercice 44.

On considère les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $b_0 > a_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Montrer que ces deux suites sont bien définies puis qu'elles convergent vers la même limite.

Exercice 45.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles.

1. On suppose : $u_n \rightarrow a$ avec $a > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$.
2. On suppose $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_n = a$ avec $a > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Memo

- Comment montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone?
 - Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.
 - Déterminer si le quotient u_{n+1}/u_n est inférieur ou non à 1 si la suite est à termes positifs.
 - Utiliser la définition implicite de la suite, c'est-à-dire la monotonie de la fonction si la suite est définie comme antécédent.
- Comment déterminer si une suite converge/admet une limite?
 - Utiliser le théorème d'encadrement (ou juste minoration ou majoration pour une limite infinie)
 - Étudier sa monotonie et son caractère bornée
 - Étudier des suites extraites (deux suites extraites ayant des limites différentes pour contredire la convergence, convergence même une même limite des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ pour conclure à la convergence.
- Comment déterminer la limite d'une suite?
 - Calculer sa limite
 - Utiliser l'unicité de la limite
 - Encadrer/majorer/minorer la suite
- Comment donner une expression en fonction de n d'une suite définie par récurrence?
 - Appliquer le cours si c'est une suite géométrique ou récurrente linéaire d'ordre 2.
 - Se ramener à une suite dont on connaît l'expression (c'est-à-dire une des deux précédentes)
 - Faire une récurrence (en "intuitant" la formule sur les premiers termes)
- Comment étudier une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue?
 - On détermine les points fixes de f .
 - Si on peut déterminer la monotonie de la suite sans calcul (ou presque), on conclut.
 - Sinon, on dresse le tableau de variations de f , on en déduit des intervalles stables par f .

- Si f est croissante
 - * On détermine le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ pour connaître la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La monotonie de la suite peut dépendre de la valeur de u_0 .
 - * On étudie le comportement de la suite selon la valeur de u_0 .
- Si f est décroissante
 - * On étudie le signe de $g : x \mapsto f \circ f(x) - x$ pour connaître la monotonie de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0 .
 - * On étudie le comportement de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0 .
 - * On étudie la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (f(u_{2n}))_{n \in \mathbb{N}}$ en utilisant la continuité de f .
 - * On en déduit la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si f change de variations

On étudie le comportement de la suite selon la valeur de u_0 en travaillant sur des intervalles stables par f pour se ramener aux situations précédentes (f croissante ou f décroissante).

