

Correction du TD n 8

Correction 1 On pose $f : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sqrt{1-x^2} \end{cases}$. On a $A = \{f(\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$. Elle est dérivable de dérivée $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, son tableau de variations est donc :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0

On a $1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2}$, donc, d'après le tableau de variations, la borne supérieure de l'ensemble est à chercher entre $f(1)$ et $f(\frac{1}{2})$. On a $f(1) = 0$ donc le maximum de notre ensemble est atteint pour $n = 2$ et vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Correction 2 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \leq 1$ donc l'ensemble est majoré. Il admet donc une borne supérieure. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = 1$ donc il ne peut y avoir de majorant plus petit et 1 est la borne supérieure de l'ensemble. Ce n'est pas un maximum car il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - \frac{1}{n} = n + \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \geq 0$ et cette valeur est atteinte pour $n = 1$, c'est donc le minimum de l'ensemble.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, l'inégalité est donc vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc l'ensemble est égal à \mathbb{R} . Il n'admet ni borne supérieure, ni borne inférieure.

3. L'ensemble n'est pas majoré puisqu'on peut prendre x aussi grand que possible. Il est minoré par 1 donc il admet une borne inférieure. Ce n'est pas un minimum car l'inégalité est stricte donc $1 \notin \{x \in \mathbb{Q}, x^2 > 1\}$.
4. L'ensemble est borné, il admet donc une borne supérieure et une borne inférieure. Pour tout $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, on a $0 \leq x \leq 1$ et 0 et 1 appartiennent à cet ensemble donc $\min([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ et $\max([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$.
5. L'ensemble est à nouveau borné mais cette fois-ci, la borne inférieure, égale à 0, et la borne supérieure, égale à 1, n'appartiennent pas à l'ensemble, ce dernier n'admet donc pas de minimum ni de maximum.

Correction 3 1. Soit $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, alors $x = \lambda + a$ avec $a \in \mathbb{R}$; on a donc

$$x \leq \lambda + \sup(A).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, on a

$$\sup\{\lambda + a, a \in A\} \leq \lambda + \sup(A).$$

Soit maintenant $a \in A$, alors $a + \lambda \in \{\lambda + a, a \in A\}$ donc

$$a + \lambda \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\}$$

soit encore

$$a \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on a :

$$\sup(A) \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda,$$

d'où $\sup(A) + \lambda \leq \sup\{\lambda + a, a \in A\}$. Par double inégalité, on a montré l'égalité.

2. On suppose $\lambda \geq 0$. Si $\lambda = 0$, le résultat est vrai, on suppose donc $\lambda > 0$. On procède, à nouveau, par double inégalité. Soit $x \in \{\lambda a, a \in A\}$, alors $x = \lambda a$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$a \leq \sup(A)$$

et $\lambda > 0$ donc

$$x \leq \lambda \sup(A).$$

Soit maintenant $a \in A$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in A\}$ donc

$$\lambda a \leq \sup\{\lambda a, a \in A\}.$$

Comme $\lambda > 0$, on peut diviser l'inégalité par λ et on obtient :

$$a \leq \frac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in A\}.$$

Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a $\sup(A) \leq \frac{1}{\lambda} \sup \{\lambda a, a \in A\}$. Par double inégalité, on a montré l'égalité.

3. Si $\lambda < 0$, on a $\sup \{\lambda a, a \in A\} = \lambda \inf(A)$. En effet, si $x \in \{\lambda a, a \in A\}$, on a $x = \lambda a$ avec $a \in A$ donc $a \geq \inf(A)$. Comme $\lambda < 0$, multiplier par λ l'inégalité donne

$$x \leq \lambda \inf(A).$$

De même, si $a \in A$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in A\}$ donc $\lambda a \leq \sup \{\lambda a, a \in A\}$. On divise par λ ce qui inverse l'inégalité et on obtient $\frac{1}{\lambda} \sup \{\lambda a, a \in A\} \leq a$. Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a :

$$\frac{1}{\lambda} \sup \{\lambda a, a \in A\} \leq \inf(A).$$

Par double inégalité, on a montré l'égalité suivante :

$$\sup \{\lambda a, a \in A\} = \lambda \inf(A).$$

Correction 4 1. On a : $\forall a \in A, a \leq \sup B$ donc $\sup(B)$ est un majorant de A et, par suite, $\sup A \leq \sup B$.

2. On a : $\forall a \in A, a \geq \inf B$ donc $\inf B$ est un minorant de A d'où $\inf(A) \geq \inf B$.

3. Soit $x \in A \cup B$, alors soit x est dans A et $x \leq \sup A$, soit x est dans B et $x \leq \sup B$ donc, dans les deux cas, $x \leq \max(\sup A, \sup B)$. On en déduit que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$ donc $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Pour l'inégalité réciproque, on utilise la première implication: $A \subset A \cup B$ donc $\sup(A) \leq \sup(A \cup B)$ et $B \subset A \cup B$ donc $\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$. Ces deux inégalités impliquent $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$ d'où l'égalité.

Correction 5 Il suffit d'écrire

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

ce qui implique

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < (\lfloor x \rfloor + n) + 1$$

on a alors montré que l'entier $\lfloor x \rfloor + n$ vérifie la caractérisation de la partie entière de $x + n$ (comme l'unique entier N tel que $N \leq x + n < N + 1$) donc $\lfloor x \rfloor + n = \lfloor x + n \rfloor$.

Correction 6 1. Pour $a = b = \frac{1}{2}$, on a $a + b = 1$ donc $\lfloor a + b \rfloor = 1$ et $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.

2. Pour $a = b = \frac{1}{3}$, on a $a + b = \frac{2}{3}$ donc $\lfloor a + b \rfloor = 0$ et $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.

3. Pour $a = b = \frac{1}{3}$, on a $ab = \frac{1}{9}$ donc $\lfloor ab \rfloor = 0$ et $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.

4. Pour $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{3}{2}$, on a $ab = \frac{6}{5}$ donc $\lfloor ab \rfloor = 1 = \lfloor b \rfloor$ et $\lfloor a \rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.

5. Pour $a = b = -\frac{1}{3}$, on a $ab = \frac{1}{9}$ donc $\lfloor ab \rfloor = 0$ et $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = -1$ d'où l'égalité souhaitée.

6. Pour $a = \frac{1}{2}$ et $n = 2$, on a $\lfloor a \rfloor = 0$ donc $n\lfloor a \rfloor = 0$ alors que $na = 1$ donc $\lfloor na \rfloor = 1$.

7. On a déjà traité le cas $k = 0, k = 1$ et $k = -1$. On prend $a = \frac{1}{k}, b = k^2 + \frac{1}{2}$, on a $ab = k + \frac{1}{2k}$ donc $\lfloor ab \rfloor = k$ et $\lfloor a \rfloor = 0$.

Correction 7 On sait que :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

et

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \quad (1)$$

D'autre part, par définition de $\lfloor x + y \rfloor$, on a :

$$\lfloor x + y \rfloor \leq x + y < \lfloor x + y \rfloor + 1 \quad (2)$$

En combinant la première inégalité de (1) et la deuxième inégalité de (2), on obtient

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x + y \rfloor + 1$$

et en combinant la deuxième inégalité de (1) et la première inégalité de (2), on obtient

$$\lfloor x + y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < \lfloor x + y \rfloor + 1 \text{ et } \lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Comme ce sont des inégalités strictes entre entiers, on en déduit que :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \text{ et } \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

et on a montré l'encadrement souhaité.

Correction 8 On sait que, $\forall x > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, donc

$$\forall x > 1, x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0,$$

on en déduit que la limite en $+\infty$ est nulle.

Correction 9 On suppose, tout d'abord, $x \in [0, 1[$. On a alors $\lfloor x \rfloor = 0$. De plus, $nx \in [0, n[$ donc $\lfloor nx \rfloor \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [0, 1[$. On a donc $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.

Supposons maintenant $x \in \mathbb{R}$. On écrit $x = a + \lfloor x \rfloor$ avec $a \in [0, 1[$. On a alors $nx = na + n\lfloor x \rfloor$ puis $\lfloor nx \rfloor = \lfloor na \rfloor + n\lfloor x \rfloor$ en utilisant l'exercice 5. On divise par n et on applique la partie entière :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\lfloor na \rfloor}{n} + \lfloor x \rfloor \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

D'après le cas traité ci-dessus, en appliquant l'exercice 5

on a $\left\lfloor \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$ donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. On a bien l'égalité souhaitée.

Correction 10 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \lfloor x^2 \rfloor &= \lfloor x \rfloor^2 \\ \Leftrightarrow \lfloor x^2 \rfloor - \lfloor x \rfloor^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lfloor x^2 - \lfloor x \rfloor^2 \rfloor &= 0 \text{ car } \lfloor x \rfloor^2 \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x^2 - \lfloor x \rfloor^2 &\in [0, 1[\end{aligned}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

Correction 11 On procède par disjonction de cas.

Si $n + m = 2p$, alors $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor = p$ et $\left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n-2p+1}{2} \right\rfloor = n-p$ donc la somme vaut n .

Si $n + m = 2p + 1$, alors $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor = p$ et $\left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n-2p}{2} \right\rfloor = n-p$ et la somme vaut, à nouveau, n .

Correction 12 On pose $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. On a $-1 \leq u_n \leq 2$ donc A est un ensemble borné. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ donc 2 est le maximum de A .

On remarque que, pour $n = 2p + 1$, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{2p+1} = -1$, cela montre qu'il ne peut exister de minorant de A strictement supérieur à -1. On a donc

$$\inf(A) = -1.$$

L'ensemble A n'admet pas de minimum car il n'existe pas d'entier n tel que $(-1)^n + \frac{1}{n+1} = -1$.

Correction 13 1. Soit $x \in A+B$, alors $x = a+b$ avec $(a, b) \in A \times B$. Comme $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$, on a donc $a+b \leq \sup(A) + \sup(B)$. Ainsi, $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A+B$ donc $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$. Montrons l'autre inégalité. Soit $a \in A$. Alors il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B qui tend vers $\sup(B)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a + b_n \in A+B$ donc $a + b_n \leq \sup(A+B)$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq \sup(A+B) - b_n$. On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $a \leq \sup(A+B) - \sup(B)$ donc $\sup(A+B) - \sup(B)$ est un majorant de A , on en déduit que $\sup(A) \leq \sup(A+B) - \sup(B)$ ce qui montre l'autre inégalité.

2. Soit $a \in A$, alors $-a \in -A$ donc $-a \geq \inf(-A)$ puis $a \leq -\inf(-A)$ donc $-\inf(-A)$ est un majorant de A . On en déduit que $\sup(A) \leq -\inf(-A)$. Montrons l'autre inégalité. Soit $a \in A$, alors $a \leq \sup(A)$ donc $-\sup(A) \leq -a$. Comme $-a \in -A$, $-\sup(A)$ est un minorant de $-A$ donc $\inf(-A) \leq -\sup(A)$. Par double inégalité, on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.

3. Soit $b \in B$, alors $\inf(B) \leq b$. Pour tout $a \in A$, on a donc $\inf(B) + a \leq a + b$. Comme $a + b \in A+B$, on a $\inf(B) + a \leq \sup(A+B)$. Ainsi, $\sup(A+B) - \inf(B)$ est un majorant de A , on a donc $\sup(A) \leq \sup(A+B) - \inf(B)$ d'où l'inégalité souhaitée.

Correction 14 Soit $y \in \mathbb{R}$, alors par définition

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1,$$

donc

$$-\lfloor y \rfloor - 1 < -y \leq -\lfloor y \rfloor$$

- Si $y \in \mathbb{Z}$, alors $-y \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor -y \rfloor = -y = -\lfloor y \rfloor$.
- Sinon, on a $-\lfloor y \rfloor - 1 < -y < -\lfloor y \rfloor$ donc $\lfloor -y \rfloor = -\lfloor y \rfloor - 1$.

Correction 15 Par définition de la partie entière, on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $-2x \leq -2\lfloor x \rfloor \leq 2 - 2x$ et $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$. On en déduit que :

$$-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2.$$

Comme $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est un entier, il ne peut être égal qu'à 0 ou 1.

Correction 16 On raisonne par double implication.

\Leftarrow Si $x \in \mathbb{Z}$, $x^2 \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$ et $\lfloor x^2 \rfloor = x^2$ donc l'égalité est vraie.

\Rightarrow On suppose maintenant $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$. Par définition de la partie entière, on a :

$$x^2 - 1 < \lfloor x^2 \rfloor \leq x^2$$

et

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Comme x est négatif, en élevant au carré la dernière inégalité, on obtient :

$$x^2 \leq [x]^2 \leq (x-1)^2.$$

Or $[x^2] = [x]^2$ par hypothèse et comme $[x^2] \leq x^2$, on a $[x]^2 = x^2$ par double inégalité. Ceci montre que x^2 , et donc x , est entier.

Si x est positif, l'implication \Leftarrow reste vraie. En revanche, on a l'égalité $[x^2] = [x]^2$ pour $x = \frac{3}{2}$ avec $x \notin \mathbb{N}$.

Correction 17 Soit $t \in [a, b]$, alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|.$$

On sait que $|f(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ et $|g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |g(t)|$. On a donc :

$$|f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |g(t)|.$$

Ceci étant valable pour tout $t \in [a, b]$, on a donc :

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t) + g(t)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |g(t)|.$$

Remarque. L'égalité est fautive, on peut s'en convaincre en prenant $g = -f$ et f non identiquement nulle.

Correction 18 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : x \mapsto x^2 + ax - 1$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto 2x + a$.

- Si $-\frac{a}{2} < 0$ c'est-à-dire $a > 0$ alors f_a est croissante, on a le tableau de variations suivant :

x	0	1
f_a	-1	a

et $\sup_{x \in [0, 1]} |f_a(x)| = \max(1, a)$.

- Si $-\frac{a}{2} > 1$, c'est-à-dire $a < -2$, f_a est décroissante, on a le tableau de variations suivant :

x	0	1
f_a	-1	a

et $\sup_{x \in [0, 1]} |f_a(x)| = |a|$

- Si $-\frac{a}{2} \in [0, 1]$, c'est-à-dire $a \in [-2, 0]$, elle atteint son maximum en 0 ou 1 et son minimum en $-\frac{a}{2}$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	$-\frac{a}{2}$	1
f_a	-1	$-\frac{a^2}{4} - 1$	a

Comme $a < 0$, le maximum de $|f_a|$ est $\frac{a^2}{4} + 1$.

On a montré :

a	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$\sup f_a $	$ a $	$\frac{a^2}{4} + 1$	1	a	

Comme pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sup_{x \in [0, 1]} |f_a(x)| \geq 1$ et $\sup_{x \in [0, 1]} |f_0(x)| = 1$, on en déduit que $\inf_{a \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [0, 1]} |f_a(x)| = 1$.

Correction 19 Pour $x \in [0, 1]$, on pose $k = [nx]$. On a $k \in [0, n-1]$ et $x = a + \frac{k}{n}$ avec $a \in [0, \frac{1}{n}]$. Pour tout $j \in [0, n-1]$, on a $[x + \frac{j}{n}] = [a + \frac{j+k}{n}]$ donc

$$[x + \frac{j}{n}] = \begin{cases} 0 & \text{si } j+k < n \\ 1 & \text{si } j+k \geq n \end{cases}$$

On a donc $\sum_{j=0}^{n-1} [x + \frac{j}{n}] = \sum_{j=0}^{n-k-1} \underbrace{[x + \frac{j}{n}] = 0}_{=0} + \sum_{j=n-k}^{n-1} \underbrace{[x + \frac{j}{n}] = 1}_{=1} = k$ car il y a k termes entre $n-k$ et $n-1$. Comme $k = [nx]$, on a le résultat pour $x \in [0, 1]$.

On se ramène au cas précédent pour le cas général : Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x = a + [x]$ avec $a \in [0, 1[$. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \left[x + \frac{j}{n} \right] &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[a + [x] + \frac{j}{n} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left([x] + \left[a + \frac{j}{n} \right] \right) \text{ car } [x] \in \mathbb{Z} \\ &= n[x] + \sum_{j=0}^{n-1} \left[a + \frac{j}{n} \right] \\ &= n[x] + [na] \text{ d'après le cas traité précédemment} \end{aligned}$$

Comme $n[x] \in \mathbb{Z}$, on applique encore l'exercice 5 pour écrire

$$n[x] + [na] = [n[x] + na]$$

et comme $n[x] + na = n(a + [x]) = nx$, on a bien le résultat pour $x \in \mathbb{R}$.

Correction 20 On commence par trouver une inégalité entre $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ et $\sqrt{4n+2}$ en raisonnant (par exemple) par équivalence:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{4n+2} &\Leftrightarrow n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} + n \leq 4n+2 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n+1 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi. Par croissance de la partie entière, on en déduit que

$$[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] \leq [\sqrt{4n+2}].$$

On remarque que $\sqrt{4n+2}$ n'est jamais entier. En effet, si m est entier, alors $m^2 = 4r^2$ ou $4r^2 + 4r + 1$ selon que m est pair ou non. On n'a donc jamais un carré de la forme $4n+2$.

Pour conclure, on suppose par l'absurde qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < m < \sqrt{4n+2},$$

et on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < m < \sqrt{4n+2} \\ \Leftrightarrow n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} + n < m^2 < 4n+2 &\text{par positivité des deux membres} \\ \Leftrightarrow 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} < m^2 < 4n+2 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < m^2 - 2n - 1 < 2n+1 \\ \Leftrightarrow 4n(n+1) < (m^2 - 2n - 1)^2 < 4n^2 + 4n + 1 &\text{par positivité des deux membres} \end{aligned}$$

Ce dernier encadrement est absurde car $(m^2 - 2n - 1)^2$ est un entier et il ne peut être strictement compris entre deux entiers consécutifs. On en déduit que

$$[\sqrt{4n+2}] < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{4n+2}$$

donc $[\sqrt{4n+2}] \leq [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]$ et par double inégalité, on a montré l'égalité.

Correction 21 Pour tout entier k tel que $j^2 \leq k < (j+1)^2$ c'est-à-dire pour $k \in \llbracket j^2, (j+1)^2 - 1 \rrbracket$, on a $[\sqrt{k}] = j$. On peut réécrire la somme en groupant les termes identiques :

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \sqrt{k} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j^2 \leq k < (j+1)^2} [\sqrt{k}] = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{j^2 \leq k < (j+1)^2} j.$$

Il y a $(j+1)^2 - j^2 = 2j+1$ entiers entre j^2 et $(j+1)^2 - 1$. La somme est donc égale à :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} j(2j+1) \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \text{ en utilisant la formule de la somme des carrés} \\ &= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}. \end{aligned}$$