Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 4

Devoir d'entrainement 4.

Exercice 1.

1. On considère l'équation différentielle suivante:

$$(E_1) \quad 2x(1-x)y' + y = 0.$$

Résoudre (E_1) sur l'intervalle $]0,1[$.

2. On considère l'équation différentielle suivante:

$$(E_2) \quad 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}.$$

(a) Résoudre (E_2) sur l'intervalle $]0,1[$.
(b) Quelles sont les solutions de (E_2) sur $]0,1[$ qui sont à valeurs dans $]0,+\infty[$?

On considère l'équation différentielle non linéaire:

$$(E_3) \quad xy' + 2y(1-y) = 0.$$

3. Quelles sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ solution de (E_3)?

4. Soit u une solution de (E_3) sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1[$.

(a) Montrer que u est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
(b) On admet que u admet une limite finie quand x tend vers 0^+ et une limite finie quand x tend vers $+\infty$. En déduire que u réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle de la forme $]\alpha,\beta[$ avec $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.
(c) On note v la bijection réciproque de u. Montrer que v est solution de (E_1) sur $]\alpha,\beta[$.
(d) En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que:

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ u(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{c}\right)^2}.$$

5. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_3) sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1[$.

(a) Décrire $\mathcal{S}$.
(b) Soient $x_0 > 0$ et $y_0 \in]0,1[$. Montrer qu'il existe une unique solution u_0 de $\mathcal{S}$ qui vérifie $u_0(x_0) = y_0$.

Exercice 2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par: $\forall x \in [0,1], f(x) = (x-1)^2$. On pose $g = fof$.

(a) Dresser le tableau de variation de f.

(b) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0,1]$ que l'on notera α.

(c) Dresser le tableaux de variations de g sur $\mathbb{R}$.

(d) Déterminer les points fixes de g.

(e) En déduire le signe de $g(x)-x$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par: $\begin{cases} u_0 = a, \text{ et} \\ u_{n+1} = (u_n-1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

2. On suppose tout d'abord $a \in [0,\alpha[$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis w_n en fonction de v_n.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,\alpha[$.

   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer sa limite.

   (d) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

   (e) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente?

3. Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 \in]\alpha,1]$?

4. (a) Montrer qu'il existe $a_1 < 0$ et $a_2 > 2$ tels que $g(a_1) = g(a_2) = 1$.

   (b) Montrer que l'on connaît la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 \in [a_1, a_2]$.

5. On suppose ici $u_0 \in [0,\alpha[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_n = \dfrac{\ln(4v_n)}{2^n}$.

   (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a:

   $$v_{n+1} = v_n^2(2-v_n)^2 \text{ et } x_{n+1} - x_n = \frac{\ln(1-\frac{v_n}{2})}{2^n}$$

   (b) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n < p$. Démontrer l'inégalité suivante: $\dfrac{\ln(1-\frac{v_n}{2})}{2^{n-1}} \leqslant x_p - x_n \leqslant 0$.

   (c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L strictement négatif.

   (d) Démontrer que $x_n = L + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$

   (e) En déduire un équivalent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.
L'objectif du problème est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

Première partie:

1. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \mathrm{ch} x$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. Soit f un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout réel α, la fonction $f_\alpha : x \mapsto f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{E}$.
3. Soit f un élément de $\mathcal{E}$. En choisissant judicieusement x et y dans l'équation fonctionnelle, prouver que
   (a) $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
   (b) Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.
   (c) Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

Deuxième partie
A partir de maintenant, on se propose de déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ qui s'annulent sans être pour autant la fonction nulle. Soit f une telle fonction.

4. Montrer que $f(0) = 1$ et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$. On note par la suite Ω l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^+$ en lesquels f s'annule.
5. Montrer que Ω a une borne inférieure, que l'on notera α par la suite.
6. Prouver que $f(\alpha) = 0$ (raisonner par l'absurde). En déduire que α est strictement positif.
7. Montrer que f est strictement positive sur $[0; \alpha[$.

Notons maintenant $\omega = \pi/2\alpha$ puis $g : x \mapsto \cos \omega x$, et enfin $G = \left\{\frac{p\alpha}{2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$
On admet que tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de G.

8. Justifier que pour tout entier q, on a $f\left(\dfrac{\alpha}{2^q}\right) + 1 = 2f\left(\dfrac{\alpha}{2^{q+1}}\right)^2$
9. En déduire par récurrence sur q que pour tout entier q, $f\left(\dfrac{\alpha}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{\alpha}{2^q}\right)$
10. Démontrer ensuite que pour tout élément x de G, $f(x) = g(x)$.
11. En déduire $f = g$.

Correction du devoir d'entrainement n 4

Exercice 1 1. *On considère l'équation différentielle suivante:*

$$(E_1) \quad 2x(1-x)y' + y = 0.$$

Résoudre (E_1) *sur l'intervalle* $]0,1[$.

On cherche tout d'abord une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x(1-x)}$. On a

$$\int^x \frac{1}{2t(1-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1-x|$$

Les solutions sur $]0,1[$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda\sqrt{\frac{1-x}{x}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beaucoup d'erreurs d'étourderie sur cette question, soit avec le facteur $\frac{1}{2}$, soit l'oubli du signe en intégrant $\ln(1-x)$. Certains sont partis sur l'idée d'une intégration par parties. On cherche à intégrer l'inverse de $x - x^2$ qui est un polynôme de degré 2, vous savez donc exactement ce qu'il faut faire selon la valeur de son discriminant ($\Delta > 0$ on décompose en deux fractions et on intègre en deux ln, $\Delta = 0$, on intègre en $\dfrac{-K}{(x-x_0)}$ avec x_0 la racine double, $\Delta < 0$, on intègre, après changement de variable, en arctan.

2. *On considère l'équation différentielle suivante:*

$$(E_2) \quad 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}.$$

(a) *Résoudre* (E_2) *sur l'intervalle* $]0,1[$. On utilise la méthode de la variation de la constante et on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$. On a $2\lambda'(x)x(1-x)\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ donc

$$\lambda'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\arcsin(x)\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions sur $]0,1[$ sont les fonctions :

$$x \mapsto (\lambda + \frac{1}{2}\arcsin(x))\sqrt{\frac{1-x}{x}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Là j'en ai encore perdu énormément sur des erreurs de calcul. Parmi ceux qui sont arrivés à chercher une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, je crois que tout le monde a reconnu la dérivée de arcsin

(b) *Quelles sont les solutions de* (E_2) *sur* $]0,1[$ *qui sont à valeurs dans* $]0,+\infty[$*?* On veut $\lambda + \arcsin(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$. Il faut donc $\lambda \geqslant 0$.

Peu de réponses car il fallait, bien entendu, avoir répondu aux deux précédentes. *On considère l'équation différentielle non linéaire:*

$$(E_3) \quad xy' + 2y(1-y) = 0.$$

3. *Quelles sont les fonctions constantes sur* $\mathbb{R}$ *solution de* (E_3)*?* Les fonctions constantes solution de (E_3) sont $y = 0$ et $y = 1$.

4. *Soit* u *une solution de* (E_3) *sur* $]0,+\infty[$ *à valeurs dans* $]0,1[$.

(a) *Montrer que* u *est strictement décroissante sur* $]0,+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a $2u(x)\,(1-u(x)) > 0$ donc $xu'(x) \leqslant 0$ ce qui impose $u'(x) < 0$ et u est bien décroissante sur $]0,+\infty[$.

(b) *On admet que* u *admet une limite finie quand* x *tend vers* 0^+ *et une limite finie quand* x *tend vers* $+\infty$*. En déduire que* u *réalise une bijection de* $]0,+\infty[$ *vers un intervalle de la forme* $]\alpha,\beta[$ *avec* $0 \leqslant \alpha$ *et* $\beta \leqslant 1$.

La fonction u est strictement décroissante donc injective, elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]\lim\limits_{x\to+\infty} u(x), \lim\limits_{x\to 0^+} u(x)[$ donc vers un intervalle de la forme $]\alpha,\beta[$. De plus, u est à valeurs dans $]0,1[$, ses limites appartiennent donc à $[0,1]$.

(c) *On note* v *la bijection réciproque de* u*. Montrer que* v *est solution de* (E_1) *sur* $]\alpha,\beta[$. Tout d'abord, u' est strictement négative donc elle ne s'annule pas, on a donc bien v dérivable. Soit $x \in]\alpha,\beta[$, alors

$$v'(x) = \frac{1}{u' \circ v(x)}.$$

On sait que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$xu'(x) + 2u(x)(1-u(x)) = 0$$

donc, pour tout $x \in]\alpha,\beta[$,

$$v(x)u' \circ v(x) + 2u \circ v(x)\,(1 - u \circ v(x)) = 0,$$

c'est-à-dire

$$v(x)u' \circ v(x) + 2x(1-x) = 0.$$

soit encore

$$2x(1-x)\frac{1}{u' \circ v(x)} + v(x) = 0.$$

On a bien

$$2x(1-x)v'(x) + v(x) = 0,$$

donc v est bien solution de (E_1).

(d) *En déduire qu'il existe* $c > 0$ *tel que:*

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ u(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2}.$$

D'après la question 1, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$v(x) = \lambda\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Comme v a pour image $]0,+\infty[$, on a $\lambda > 0$. Déterminons la bijection réciproque de v. Soit donc $a > 0$, alors

$$\begin{aligned} v(x) = a \quad &\Leftrightarrow \lambda\sqrt{\frac{1-x}{x}} = a \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1-x}{x} = \frac{a^2}{\lambda^2} \\ &\Leftrightarrow 1-x = \frac{a^2 x}{\lambda^2} \\ &\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{a^2}{\lambda^2}+1\right)x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{1+\frac{a^2}{\lambda^2}} \end{aligned}$$

On en déduit que $u : x \mapsto \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{\lambda^2}}$ avec $\lambda > 0$. En prenant $c = \lambda$, on a bien le résultat souhaité.

5. *On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_3) sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1[$.*

   (a) *Décrire $\mathcal{S}$.*
   On a montré que si u est une solution de (E_3) à valeurs dans $]0,1[$ alors, il existe $c > 0$ tel que

   $$\forall x > 0, u(x) = \frac{1}{1+(x/c)^2}.$$

   Réciproquement, si $c > 0$, on a bien

   $$\forall x > 0, \frac{1}{1+(x/c)^2} \in]0,1[,$$

   et pour tout $x > 0$, $u'(x) = \dfrac{-2x/c^2}{(1+(x/c)^2)^2}$ donc

   $$xu'(x) + 2u(x)\left(1-u(x)\right) = \frac{-2x^2/c^2 - 2(x/c)^2}{(1+(x/c)^2)^2} = 0$$

   donc u est bien solution de (E_3).
   Ainsi,

   $$S = \{x \mapsto \frac{1}{1+(x/c)^2}, c > 0\}$$

   (b) *Soient $x_0 > 0$ et $y_0 \in]0,1[$. Montrer qu'il existe une unique solution u_0 de $\mathcal{S}$ qui vérifie $u_0(x_0) = y_0$.*

   $$\frac{1}{1+(x_0/c)^2)} = y_0 \Leftrightarrow 1+(x_0/c)^2 = 1/y_0 \Leftrightarrow (x_0/c)^2 = \frac{1-y_0}{y_0} \Leftrightarrow \frac{c^2}{x_0^2} = \frac{y_0}{1-y_0} \Leftrightarrow c^2 = \frac{x_0^2 y_0}{1-y_0}$$

   et comme $c > 0$, on a bien une unique valeur de c solution donc une unique fonction u_0 vérifiant $u_0(x_0) = y_0$.

Exercice 2 1. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ la fonction définie par: $\forall x \in [0,1], f(x) = (x-1)^2$. On pose $g = fof$.*

(a) *Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$*
La fonction f est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = 2(x-1)$ donc f est décroissante sur $[0,1]$. On a

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0

(b) *Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0,1]$. On le notera α*
On a $f(x) - x = x^2 - 3x + 1$, c'est un polynôme de degré 2, de coefficient dominant positif et admettant pour racines $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. On a $0 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Attention, certains m'ont parlé d'injectivité de f pour justifier l'existence ou l'unicité de point fixe, cela n'a pas de sens! Une fonction injective peut (ou pas) admettre un ou plusieurs points fixes

(c) *Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$*
On a $g(x) = (x(x-2))^2$ donc $g'(x) = 2(2x-2)x(x-2) = 4x(x-1)(x-2)$. On en déduit que

x	$-\infty$		0		α		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	α	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

L'erreur classique a été de me donner le tableau de variations sur $[0,1]$ et pas sur $\mathbb{R}$. J'en ai vu quelques uns échouer à me trouver le signe de la dérivée (pourquoi avoir développé?!?!). Pensez à toujours regarder si 0, 1 ou -1 sont racines d'un polynôme lorsque vous cherchez à le factoriser.

(d) *Déterminer les points fixes de g* On a $g(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow = x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = 0$ et comme les points fixes de f sont points fixes de g, on sait que $x^2 - 3x + 1$ divise g donc $g(x) = x(x-1)(x^2 - 3x + 1)$.
On pouvait aussi remarquer que 0 et 1 sont racines évidentes du polynôme $g(x) - x$ et retrouver ainsi la factorisation. Les points fixes de g sont $0, 1, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(e) *En déduire le signe de $g(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.*

On a
$$g(x) - x = x(x-2)(x^2 - 3x + 1) = x(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha')$$
avec $\alpha' = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		α		1		α'		$+\infty$
$g(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit $a \in [0,1]$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par: $u_0 = a \in]0,\alpha[$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

2. *On suppose tout d'abord $a \in [0,\alpha[$.*

   (a) *Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis w_n en fonction de v_n.*

   On a
   $$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) = g(u_{2n}) = g(v_n)$$
   et
   $$w_n = u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(v_n)$$

   Beaucoup d'erreurs sur cette question. Impossible de faire correctement le reste si on n'a pas vu que g va être la fonction qui définit v. Pour info, la réponse était donnée question 5a)

   (b) *Montrer que $v_n \in [0,\alpha[, \forall n \in \mathbb{N}$.*

   On remarque, d'après le tableau de variations de g, que $[0,\alpha[$ est un intervalle stable par g. On a $v_0 = u_0 \in]0,\alpha[$ par hypothèse, on suppose donc que v_n appartient à cet intervalle; alors $v_{n+1} = g(v_n)$ et comme $v_n \in]0,\alpha[$ par hypothèse de récurrence, on sait que $g(v_n) \in]0,\alpha[$. Ainsi, on a montré le résultat par récurrence.

   J'ai accepté ceux qui m'ont dit $u_0 \in [0,\alpha[$ et $[0,\alpha[$ est stable par g donc car la récurrence est immédiate..

   (c) *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer sa limite.*

   On utilise maintenant la question **??**. On sait que $v_n \in]0,\alpha[$ pour tout n et $x \mapsto g(x) - x$ est négative sur $]0,\alpha[$ donc $v_{n+1} = g(v_n) < v_n$ et la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée puisque son support est inclus dans $[0,\alpha[$, elle est donc convergente. De plus, comme elle est décroissante, sa limite ℓ ne peut être égale à α donc $\ell \in [0,\alpha[$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ or $v_{n+1} = g(v_n)$ donc, par continuité de g, on a également $v_{n+1} \to g(\ell)$. Par unicité de la limite, on a $g(\ell) = \ell$ et comme $g(x) < x, \forall x \in]0,\alpha[$, on a nécessairement $\ell = 0$.

   Attention, certains m'ont dit $v_n \in [0,\alpha[$ donc sa limite appartient à $[0,\alpha[$ ce qui est faux, en général. Si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0,\alpha[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in [0,\alpha]$.

   (d) *En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

   On a remarqué que $w_n = f(v_n)$ et f est continue donc $w_n \to f(l) = f(0) = 1$. Il était inutile de montrer que (w_n) converge.

   (e) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente?*

   Les suites (v_n) et (w_n) sont deux suites extraites de (u_n) et elles convergent vers des limites différentes, la suite (u_n) ne peut donc pas être convergente.

   Inutile de me dire que les indices des deux suites recouvrent les entiers! J'aurais la divergence de (u_n) même si ce n'était pas le cas.

3. *Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 \in]\alpha, 1]$?*

   Si $u_0 \in]\alpha, 1]$, alors $u_1 \in [0,\alpha[$ donc, d'après l'étude précédente, on a (u_n) divergente. Seule Clara F. a remarqué qu'il était inutile de refaire toute l'étude.

4. (a) *Montrer qu'il existe $a_1 < 0$ et $a_2 > 2$ tels que $g(a_1) = g(a_2) = 1$.*

   On a $g(\mathbb{R}_-^\star) = \mathbb{R}_+^\star$ donc 1 admet un antécédent a_1 par g dans $]-\infty, 0[$. De même $g(]2,+\infty[) =]0,+\infty[$ donc il existe un antécédent $a_2 \in]2,+\infty[$ de 1 par g.

(b) *Montrer que l'on connaît la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 \in [a_1, a_2]$.*
Si $u_0 \in [a_1, a_2]$, alors $g(u_0) = u_2 \in [0, 1]$. On sait que $(u_n) \in$ diverge si $u_0 \in [0, 1]$ et $u_0 \neq \alpha$. Ce sera donc le cas chaque fois que $u_2 \in [0, 1]$, $u_2 \neq \alpha$. Pour $u_2 = \alpha$, la suite est constante à partir du rang 2, elle est donc convergente.

5. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_n = \dfrac{\ln(4v_n)}{2^n}$.*

(a) *Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a: $v_{n+1} = v_n^2(2-v_n)^2$, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\ln(1-\frac{v_n}{2})}{2^n}$.*

On a déjà montré que $v_{n+1} = g(v_n) = v_n^2(2-v_n)^2$. Par ailleurs, $x_{n+1}-x_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln(4v_{n+1}) - \dfrac{1}{2^n}\ln(4v_n) = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{\sqrt{4v_{n+1}}}{2v_n}\right) = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{2v_n(2-v_n)}{2v_n}\right) = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1-\dfrac{v_n}{2}\right)$

(b) *Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n < p$. Démontrer l'inégalité suivante: $\dfrac{\ln(1-\frac{v_n}{2})}{2^{n-1}} \leqslant x_p - x_n \leqslant 0$.*

On remarque tout d'abord que $x_p - x_n = \sum\limits_{k=n}^{p-1} x_{k+1} - x_k = \sum\limits_{k=n}^{p-1} \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{v_k}{2}\right)}{2^k}$. Comme $v_k > 0$, tous les termes de la somme sont strictement négatifs donc $x_p - x_n < 0$. De plus, ln est croissante et (v_n) décroissante donc $\ln\left(1-\dfrac{v_k}{2}\right) > \ln\left(1-\dfrac{v_n}{2}\right)$, $\forall k = n \dots p-1$ d'où

$$x_p - x_n > \sum_{k=n}^{p-1} \frac{\ln(\left(1-\dfrac{v_n}{2}\right)}{2^k} = \ln(\left(1-\frac{v_n}{2}\right)\sum_{k=n}^{p-1}\frac{1}{2^k}$$

On explicite maintenant la suite géométrique $\sum\limits_{k=n}^{p-1}\dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{1-(1/2)^{p-n}}{1-1/2} = \dfrac{1-(1/2)^{p-n}}{2^{n-1}} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Enfin, on n'oublie pas que le ln est négatif donc la multiplication inverse les inégalités et on se retrouve avec $x_p - x_n > \dfrac{\ln(1-v_n/2)}{2^{n-1}}$.
On ne va pas se mentir, c'était un massacre.

(c) *En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L strictement négatif.*

La question précédente, appliquée à $p = n+1$ montre que (x_n) est décroissante. De plus, en l'appliquant à $n = 0$ et $p > 0$, on en déduit que $2\ln\left(1-\dfrac{v_0}{2}\right) < x_p - x_0$ donc $x_0 + 2\ln\left(1-\dfrac{v_0}{2}\right) < x_p$ et la suite est minorée donc convergente. On a vu que la suite (v_n) tend vers 0, donc, à partir d'un certain rang, elle est strictement inférieure à 1 ce qui implique que $x_n < 0$ à partir d'un certain rang. Comme (x_n) est, de plus, décroissante, sa limite ne peut être que strictement négative.

(d) *Démontrer que $x_n = L + o(\frac{1}{2^n})$ et en déduire un équivalent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

On revient à l'inégalité trouvée à la question a). On a la réécrit sous la forme

$$2\ln\left(1-\frac{v_n}{2}\right) < 2^n(x_p - x_n) < 0$$

On fixe n et on fait tendre p vers $+\infty$. On obtient alors $2\ln\left(1-\dfrac{v_n}{2}\right) < 2^n(L-x_n) < 0$
On peut maintenant faire tendre n vers $+\infty$ et par le théorème des gendarmes, on a $2^n(L-x_n) \to 0$ ce qui est équivalent à $x_n = L + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

(e) Comme $v_n = \frac{1}{4}e^{2^n x_n}$, on a $v_n = \frac{1}{4}e^{2^n L + o(1)} = \frac{e^{2^n L}}{4}.e^{o(1)} \sim \frac{e^{2^n L}}{4}$.

Attention, j'ai vu des $a \sim b$ implique $e^a \sim e^b$!!!!

Exercice 3 L'objectif du problème est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

Première partie:

1. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \text{ch}x$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}$.

   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

   $$\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(x - y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\ &= 2\cos(x)\cos(y) \end{aligned}$$

   donc $\cos \in \mathcal{E}$.

   De même, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

   $$\begin{aligned} \text{ch}(x + y) + \text{ch}(x - y) &= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} + e^{-x-y} + e^{x-y} + e^{-x+y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x\left(e^y + e^{-y}\right) + e^{-x}\left(e^{-y} + e^y\right)\right) \\ &= \text{ch}(x)\left(e^y + e^{-y}\right) \\ &= 2\text{ch}(x)\text{ch}(y) \end{aligned}$$

   donc on a bien $\text{ch} \in \mathcal{E}$.

2. Soit f un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout réel α, la fonction $f_\alpha : x \mapsto f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{E}$.

   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

   $$\begin{aligned} f_\alpha(x + y) + f_\alpha(x - y) &= f\left(\alpha(x + y)\right) + f\left(\alpha(x - y)\right) \\ &= f\left(\alpha x + \alpha y\right) + f\left(\alpha x - \alpha y\right) \\ &= 2f\left(\alpha x\right) f\left(\alpha y\right) \\ &\quad \text{car } f \in \mathcal{E} \text{ et } (\alpha\S, \alpha\dagger) \in \mathbb{R}^\in \\ &= 2f_\alpha(x)f_\alpha(y) \end{aligned}$$

   On a donc bien $f_\alpha \in \mathcal{E}$.

3. Soit f un élément de $\mathcal{E}$. En choisissant judicieusement x et y dans l'équation fonctionnelle, prouver que

   (a) $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

   On prend $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0)^2$ ce qui montre que $f(0) = 0$ ou 1.

   J'ai vu beaucoup de réponse de ce type:

   On prend $x = y = 0$. On a

   $$f(0) + f(0) = 2f(0)^2 \Leftrightarrow f(0) = f(0)^2 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1$$

   .

   Vous voyez le problème? vous me donnez une suite d'équivalences, ça ne me dit pas que la dernière ligne est vraie. Quand je vous dis qu'il faut soigner la rédaction!!!!

(b) Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

Supposons $f(0) = 0$, alors en posant $y = 0$ dans l'équation, on obtient $2f(x) = 2f(x)f(0)$ pour tout x donc $f(x) = 0$ pour tout x.

Bon, là les réponses où vous me parlez de x sans le définir et vous finissez par conclure que f est nulle (donc on imagine que l'égalité $f(x) = 0$ est vraie pour tout x sans l'avoir jamais dit... vous avez dû avoir les oreilles qui sifflaient!

(c) *Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.*

Supposons maintenant $f(0) = 1$, alors en posant $x = 0$, on obtient que pour tout y, $f(-y) + f(y) = 2f(y)$ donc $f(y) = f(-y)$ et la fonction est paire.

Tout pareil qu'à la question précédente (et celle d'avant). Une suite d'équivalences ne dit rien si vous ne concluez pas ET, on veut que l'égalité soit vraie pour tout y **Deuxième partie**

A partir de maintenant, on oublie l'hypothèse de dérivabilité de f et on se propose de déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ qui s'annulent sans être pour autant la fonction nulle. Soit f une telle fonction.

4. Montrer que $f(0) = 1$ et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On utilise les résultats prouvés dans la partie 1. On sait que f est non identiquement nulle, donc $f(0) = 1$ et f est paire. Comme on sait de plus, qu'elle s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, la parité impose qu'elle s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^+$.
On note par la suite Ω l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^+$ en lesquels f s'annule.

5. Montrer que Ω a une borne inférieure, que l'on notera α par la suite.

Il suffit de montrer que Ω est non vide et minoré. Il est clair que Ω est minoré par 0 et nous avons montré à la question précédente qu'il était non-vide, par conséquent, Ω admet une borne inférieure.

6. Prouver que $f(\alpha) = 0$ (raisonner par l'absurde). En déduire que α est strictement positif.

Supposons par l'absurde que $f(\alpha) \neq 0$. Alors, comme f est continue, il existe $\epsilon > 0$ tel que $f|_{[\alpha,\alpha+\epsilon[}$ soit non nulle; $\alpha + \frac{\epsilon}{2}$ est un alors un minorant de Ω ce qui contredit la définition de borne supérieure. On a donc $f(\alpha) = 0$ et comme $f(0) = 1$, on a $\alpha > 0$.
On peut aussi dire qu'il existe une suite d'éléments de Ω, (x_n), telle que $x_n \to \alpha$. On a alors $f(x_n) \to f(\alpha)$ par continuité de f et comme $f(x_n) = 0, \forall n$, on obtient $f(\alpha) = 0$.

Beaucoup m'ont dit que si α était la borne inférieure, elle appartenait à Ω ce qui est faux ! Un ensemble peut admettre une borne inférieure mais pas de minimum. J'ai vu aussi beaucoup de raisonnements avec " le plus petit élément de Ω". Un tel élément est le minimum, vous n'êtes donc pas du tout sûr qu'il existe.

7. Montrer que f est strictement positive sur $[0; \alpha[$.

On sait que f ne s'annule pas sur $[0, \alpha[$, par définition de α donc, puisque f est continue, elle est de signe constant donc du signe de $f(0) = 1$.
Notons maintenant $\omega = \pi/2\alpha$ puis $g : x \mapsto \cos \omega x$, et enfin

$$G = \left\{ \frac{p\alpha}{2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

8. Justifier que pour tout entier q, on a $f\left(\frac{\alpha}{2^q}\right) + 1 = 2f\left(\frac{\alpha}{2^{q+1}}\right)^2$

Il suffit d'appliquer l'égalité satisfaite par f à $x = y = \dfrac{\alpha}{2^{q+1}}$, sachant que $f(0) = 1$.

9. En déduire par récurrence sur q que pour tout entier q, $f(\frac{\alpha}{2^q}) = g(\frac{\alpha}{2^q})$

On le montre par récurrence sur q. Pour $q = 0$, on a $f(\alpha) = 0 = g(\alpha)$ donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang 0. Supposons que $f\left(\frac{\alpha}{2^q}\right) = g\left(\frac{\alpha}{2^q}\right)$. Alors

$$2f\left(\frac{\alpha}{2^{q+1}}\right)^2 = f\left(\frac{\alpha}{2^q}\right) + 1 = g\left(\frac{\alpha}{2^q}\right) + 1 = \cos\left(2.\frac{\alpha}{2^{q+1}}\right) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2^{q+1}}\right) = 2g\left(\frac{\alpha}{2^{q+1}}\right)^2$$

On sait d'après la question 11 que f est strictement positive sur $[0, \alpha[$. Par ailleurs, pour tout $x \in [0, \alpha[$, $0 \leqslant \frac{\pi x}{2\alpha} < \frac{\pi}{2}$ donc g est également strictement positive sur $[0, \alpha[$. Ainsi, on a $f(\frac{\alpha}{2^{q+1}}) = g(\frac{\alpha}{2^{q+1}})$ ce qui achève de montrer le résultat par récurrence.

Le point clé de ce raisonnement était le fait de pouvoir prendre la racine carrée car les deux quantités étaient positives (chacune par un argument distinct). Je vous rappelle que $a^2 = truc$ N'implique PAS $a = \sqrt{truc}$ sauf si vous savez que a est positif !!

10. Démontrer ensuite que pour tout élément x de G, $f(x) = g(x)$.

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, nous allons montrer, par récurrence sur p que $f(\frac{p\alpha}{2^q}) = g(\frac{p\alpha}{2^q}$. Le rang $p = 1$ est donnée par la question précédente. Supposons que le résultat soit vrai pour tout $k \leqslant p$ et montrons-le au rang $p + 1$.

$$f\left(\frac{(p+1)\alpha}{2^q}\right) = f\left(\frac{p\alpha}{2^q} + \frac{\alpha}{2^q}\right) = 2f(\frac{p\alpha}{2^q})f(\frac{\alpha}{2^q}) - f\left(\frac{p\alpha}{2^q} - \frac{\alpha}{2^q}\right) = 2f(\frac{p\alpha}{2^q})f(\frac{\alpha}{2^q}) - f\left(\frac{(p-1)\alpha}{2^q}\right)$$

On applique maintenant l'hypothèse de récurrence:

$$2f(\frac{p\alpha}{2^q})f(\frac{\alpha}{2^q}) - f\left(\frac{(p-1)\alpha}{2^q}\right) = 2g(\frac{p\alpha}{2^q})g(\frac{\alpha}{2^q}) - g\left(\frac{(p-1)\alpha}{2^q}\right) = g\left(\frac{(p+1)\alpha}{2^q}\right)$$

et le résultat est prouvé pour tout $p \in \mathbb{N}$. On conclut pour $p \in \mathbb{Z}$ par parité de f et g.

11. En déduire $f = g$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite (x_n) d'élément de G convergeant vers x. Comme f est continue, on a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$ et comme $g(x_n) = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ d'après la question précédente, on a bien $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Bon, un certains nombres m'ont dit " $f = g$ car G est dense dans $\mathbb{R}$". J'ai trouvé ça un peu gonflé étant donné que nous n'avons encore jamais rédigé un exemple où une propriété était vraie sur $\mathbb{Q}$ (par exemple) et on disait, par continuité et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, que la propriété était vraie sur $\mathbb{R}$. J'avais dit à l'oral que ça marchait mais une petite phrase pour m'expliquer que c'était en passant à la limite aurait été bienvenue.