

Correction du DM n 4

Exercice 1 1. u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t > 0$, $t^2 > 0$. Donc par composition de fonctions dérivables, v est dérivable, et $\forall t > 0$:

$$\boxed{v'(t) = 2t u'(t^2)}$$

De nouveau, par produit et composition de fonctions dérivables, v' est dérivable, et :

$$\boxed{v''(t) = 2u'(t^2) + 2t \times 2t \times u''(t^2) = 2u'(t^2) + 4t^2 u''(t^2)}$$

2. Soit $t > 0$. On calcule :

$$\begin{aligned} v''(t) + v'(t) - 2v(t) &= 2u'(t^2) + 4t^2 u''(t^2) + 2tu'(t^2) - 2u(t^2) \\ &= 4t^2 u''(t^2) + (2 + 2t)u'(t^2) - 2u(t^2) \\ &= 2 \left(2t^2 u''(t^2) + (1 + t)u'(t^2) - u(t^2) \right) \\ &= 2 \times 1 \quad \text{d'après la condition C1 appliquée au nombre } t^2. \end{aligned}$$

v est donc bien solution de $y'' + y' - 2y = 2$.

On peut aussi raisonner par équivalence ce qui nous fera gagner du temps pour la phase de synthèse:

$$\begin{aligned} &v \text{ est solution de } y'' + y' - 2y = 2 \\ \Leftrightarrow &\forall t \geq 0, v''(t) + v'(t) - 2v(t) = 2 \\ \Leftrightarrow &\forall t \geq 0, 4t^2 u''(t^2) + (2 + 2t)u'(t^2) - 2u(t^2) = 2 \\ \Leftrightarrow &\forall t \geq 0, 2t^2 u''(t^2) + (1 + t)u'(t^2) - u(t^2) = 1 \\ \Leftrightarrow &\forall t \geq 0, 2tu''(t) + (1 + \sqrt{t})u'(t) - u(t) = 1 \\ &\text{car l'image de } \mathbb{R}_+^* \text{ par la fonction carrée est } \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie car on a supposé que u vérifiait C_1 . On en déduit que v est bien solution de l'équation différentielle.

3. Résolution de $y'' + y' - 2y = 2$. On se place sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Résolution de l'équation homogène. L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ a pour discriminant $1 + 8 = 9$, et donc pour racines $\frac{-1-3}{2} = -2$ et $\frac{-1+3}{2} = 1$. Les solutions sont donc les fonctions du type :

$$y_H : t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu e^t \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- On remarque que la fonction constante à -1 est solution.
- Les solutions de cette équation sont les fonctions du type :

$$\boxed{y : t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu e^t - 1 \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

4. D'une part, v est une des fonctions trouvées à la question précédente, et d'autre part, par définition de v , on a que pour tout $t > 0$, $u(t) = v(\sqrt{t})$.
Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t > 0$:

$$u(t) = \lambda e^{-2\sqrt{t}} + \mu e^{\sqrt{t}} - 1$$

Utilisons C3. On remarque que $e^{-2\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et $e^{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Donc :

- si $\mu > 0$, $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$;
- si $\mu < 0$, $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

Or, u est bornée, d'après C3. Les deux cas précédents sont donc impossibles, d'où $\boxed{\mu = 0}$.

On en est donc à $u(t) = \lambda e^{-2\sqrt{t}} - 1$. Utilisons C2.

On a $\sqrt{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$, donc $e^{-2\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} e^0 = 1$. Donc $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} \lambda - 1$.

D'après C2, on a donc $\lambda - 1 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\lambda = 1}$.

Finalement $\boxed{\forall t > 0, u(t) = e^{-2\sqrt{t}} - 1}$.

5. Les questions précédentes montrent que si u est une solution du problème, alors u est la fonction $t \mapsto e^{-2\sqrt{t}} - 1$ (étape d'analyse).

Faisons maintenant la synthèse, et regardons si réciproquement, la fonction $u : t \mapsto e^{-2\sqrt{t}} - 1$ est, ou non, solution du problème.

- Etudions C1. On a :

$$u'(t) = \frac{-1}{\sqrt{t}} e^{-2\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad u''(t) = \frac{1}{2t^{3/2}} e^{-2\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \times \left(\frac{-1}{\sqrt{t}} \right) e^{-2\sqrt{t}} = \left(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t} \right) e^{-2\sqrt{t}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2tu''(t) + (1 + \sqrt{t})u'(t) - u(t) &= 2t \left(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t} \right) e^{-2\sqrt{t}} - (1 + \sqrt{t}) \times \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-2\sqrt{t}} - e^{-2\sqrt{t}} + 1 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + 2 - \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - 1 \right) e^{-2\sqrt{t}} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

C1 est donc vérifiée.

Remarque: cette étape est inutile si on a procédé par équivalence à la question 2

- C2 est aussi vraie, car $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} e^0 - 1 = 0$.
- Etudions C3. Pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} -2\sqrt{t} &\leq 0 \quad \text{donc} \quad 0 \leq e^{-2\sqrt{t}} \leq 1 \\ &\quad \text{donc} \quad -1 \leq \underbrace{e^{-2\sqrt{t}} - 1}_{u(t)} \leq 0. \end{aligned}$$

Cela prouve que u est bornée.

Finalement, u est bien solution du problème.

Conclusion : ce problème admet une unique fonction solution : $t \mapsto e^{-2\sqrt{t}} - 1$.

Exercice 2 1. $z = \frac{1}{y}$ donc par quotient de fonctions dérivables (y ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+^*$), z est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, z ne s'annule jamais (l'inverse d'un réel est toujours non nul). On a donc pour tout $t > 0$:

$$y(t) = \frac{1}{z(t)} \quad \text{et} \quad y'(t) = -\frac{z'(t)}{z^2(t)}.$$

La fonction y est solution de (E) si et seulement si $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned} t^2 y^2(t) - t y'(t) + y(t) &= 0 \iff \frac{t^2}{z^2(t)} + t \frac{z'(t)}{z^2(t)} + \frac{1}{z(t)} = 0 \\ &\iff t^2 + t z'(t) + z(t) = 0 \quad (\text{en multipliant par } z^2(t)) \end{aligned}$$

Cela démontre que y est solution de (E) ssi z est solution de (F) .

2. $\forall t > 0, t^2 + t z'(t) + z(t) = 0 \iff z'(t) + \frac{1}{t} z(t) = -t.$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $A : t \mapsto \ln(t)$.

► Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions du type :

$$z_H : t \mapsto C e^{-A(t)} = \frac{C}{t}, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

► D'après la méthode de variation de la constante, une solution particulière est :

$$z_P : t \mapsto C(t) e^{-A(t)} = \frac{C(t)}{t}$$

où la fonction C est une primitive de $t \mapsto -t e^{A(t)} = -t^2$.

On peut donc prendre $C : t \mapsto \frac{-t^3}{3}$, et $z_P : t \mapsto \frac{-t^2}{3}$.

► Finalement, les solutions de (F) sont les fonctions du type

$$z : t \mapsto \frac{C}{t} - \frac{t^2}{3} = \frac{3C - t^3}{3t}, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

3. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z(t) = 0 &\iff 3C - t^3 = 0 \\ &\iff t^3 = 3C \end{aligned}$$

Comme $t > 0$, cette égalité est possible si et seulement si $C > 0$.

Les solutions qui ne s'annulent jamais sont donc les fonctions du type

$$z : t \mapsto \frac{3C - t^3}{3t}, \quad \text{où } \boxed{C \leq 0}$$

4. Les solutions du problème sont les fonctions du type : $y : t \mapsto \frac{3t}{3C - t^3}, \quad \text{où } \boxed{C \leq 0}.$

Montrons-le par double implication.

► Si y est une solution de notre problème : on a vu que la fonction $z = \frac{1}{y}$ est solution de (F) , et comme $z = \frac{1}{y}$, z ne s'annule jamais. Donc d'après la question précédente, il existe $C \leq 0$ tel que $\forall t > 0, z(t) = \frac{3C - t^3}{3t}$, ce qui équivaut à $y(t) = \frac{3t}{3C - t^3}$. ok

► Réciproquement, s'il existe $C \leq 0$ tel que $\forall t > 0, y(t) = \frac{3t}{3C - t^3}$, alors y est dérivable et ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'après la question 2, $\frac{1}{y}$ est solution de (F) , ce qui implique, d'après la question 1, que y est solution de (E) . y est donc une solution de notre problème. ok