

Correction du TD n 9

Correction 1 1. $v_n \sim u_n$

2. $v_n = o(u_n)$
3. $u_n = o(v_n)$ (croissance comparée)
4. $u_n \sim v_n$

Correction 2 1. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1$.

2. $2^n + n^{10^4} \sim 2^n$
3. Soit $a \neq 0$. $(n + \sqrt{n})^a - n^a = n^a \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^a - 1 \right) \sim n^a \frac{a}{\sqrt{n}}$
4. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Correction 3 1. Faux, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

2. Faux, $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.
3. Faux, $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = n$.
4. Faux, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
5. vrai, découle de la définition.
6. faux, si $\epsilon = 0$ cela signifie que la suite est stationnaire à partir d'un certain rang si elle converge.
7. faux si $l = l'$ et $v_n < u_n$.
8. vrai, en appliquant la définition à $\epsilon < \frac{l' - l}{2}$ et pour un rang suffisamment grand, on a $u_n < l + \epsilon < l' - \epsilon < v_n$.
9. faux, $u_n = (-1)^n$.

10. vrai, contraposée de "convergente donc bornée".

11. faux, $u_n = -\frac{1}{n}$.

12. faux, $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Correction 4 1. Non, car $u_{2n} \rightarrow 2$ et $u_{2n+1} \rightarrow 0$.

2. oui, elle tend vers 0.

3. non, car $u_{4n} = 1$ et $u_{4n+2} = -1$.

4. on écrit $u_n = \exp\left(2n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. On a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $2n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim 2$, on en déduit que $u_n \rightarrow e^2$.

Correction 5 • $u_n = n - \sqrt{n^2 - n} = \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 1/n}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

- $|v_n| \leq \frac{|\sin n^2| + |\cos n^3|}{n} \leq \frac{2}{n}$ donc v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- $w_n = e^{\frac{1}{n} \ln(3 - \sin n)}$. On a $2 \leq 3 - \sin n \leq 4, \forall n$ donc $\ln 2 \leq \ln(3 - \sin n) \leq \ln 4, \forall n$ et par le théorème des gendarmes, $\frac{1}{n} \ln(3 - \sin n) \rightarrow 0$ donc $w_n \rightarrow 1$ par continuité de l'exponentielle.
- $a_n = \frac{n^3}{e^{n \ln 3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$, chaque terme tend vers 0 donc a_n aussi.
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ donc par continuité de sinus, $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0$ et cosinus étant bornée, on a $b_n \rightarrow 0$.

Correction 6 Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, kx - 1 < [kx] \leq kx$ donc, en sommant les inégalités, $\sum_{k=1}^n kx - 1 < \sum_{k=1}^n [kx] \leq \sum_{k=1}^n kx$ puis $\frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{xn(n+1)}{2n^2}$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $u_n \rightarrow \frac{x}{2}$.

Correction 7 1. Par récurrence sur n .

2. On montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 35}{u_n + \sqrt{2u_n + 35}}.$$

Le polynôme $X^2 - 2X - 35$ est de discriminant 144, les racines sont donc 7 et -5, il est positif entre ses racines. D'après la question précédente, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 7[\subset]-5, 7[$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée, elle est convergente.

Correction 8 On calcule $I_{n+1} - I_n$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e (\ln x)^n dx = \int_1^e ((\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n) dx.$$

Pour tout $x \in [1, e]$, on a $0 \leq \ln x \leq 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et la suite est décroissante.

Par positivité de l'intégrale, on sait, de plus, qu'elle est minorée par 0. On peut donc affirmer qu'elle converge.

Correction 9 On calcule $u_{n+1} - u_n$, on trouve :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{nu_n^2}{n+1} \geq 0,$$

donc la suite est croissante. Si elle converge vers une limite finie l , on $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} u_n^2 = l^2$. Par unicité de la limite, on doit avoir

$$l = l + l^2,$$

ce est équivalent à $l = 0$. Or, la suite est positive par une récurrence immédiate, étant donné qu'on a supposé $u_0 > 0$. Elle ne peut donc croire vers 0 ce qui montre que la suite tend vers $+\infty$

Correction 10 On le montre par récurrence sur $\mathbb{N}$. Pour $n = 0$, le résultat est vrai. On suppose qu'il est vrai au rang $n + 1$. On a :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n + 1)^2 + 2n + 3,$$

par hypothèse de récurrence. Or :

$$(n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2.$$

La formule est vraie au rang $n + 1$. Par le principe de récurrence, on a montré qu'elle est vraie pour tout entier n .

Correction 11 L'équation caractéristique est

$$2r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Ses racines sont $\frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{1 \pm i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$. On en déduit que les suites vérifiant $2(v_{n+1} - v_{n+2}) = v_n$ sont de la forme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\alpha \cos \frac{n\pi}{4} + \beta \sin \frac{n\pi}{4}\right).$$

Quelque soient les réels α et β , le terme $\alpha \cos \frac{n\pi}{4} + \beta \sin \frac{n\pi}{4}$ est borné et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ donc une telle suite tend vers 0, quels que soient ses premiers termes.

Correction 12 Posons $v_n = u_n + \gamma$, alors

$$v_{n+2} = u_{n+2} + \gamma = u_{n+1} + 2u_n - 4 + \gamma = (v_{n+1} - \gamma) + 2(v_n - \gamma) + \gamma - 4 = v_{n+1} + 2v_n - 2\gamma - 4.$$

Pour avoir l'égalité souhaitée, il faut $\gamma = -2$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente dont on peut déterminer l'expression. Son équation caractéristique est

$$r^2 - r + 2 = 0,$$

dont les racines sont -1 et 2 . On en déduit qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$. On a $u_0 = 1$ donc $v_0 = -1 = \alpha + \beta$ et $u_1 = 1$ donc $v_1 = -1 = -\alpha + 2\beta$. On en déduit que $\alpha = -\frac{1}{3}$ et $\beta = -\frac{2}{3}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3} - \frac{2^{n+1}}{3},$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3} - \frac{2^{n+1}}{3} + 2.$$

Correction 13 On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 2 = 2v_n,$$

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^n (u_0 - 1),$$

on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1 = 2^n (u_0 - 1) + 1.$$

Correction 14 1. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x}\right)$. La fonction est croissante sur $[1, +\infty[$ (calcul de dérivée).

On remarque que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, on va donc procéder par récurrence. On a $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$, le résultat est donc vrai au rang 0. On suppose qu'il existe un entier n tel que $u_n \geq \sqrt{2}$. On applique f qui est croissante sur $[1, +\infty[$. On obtient $f(u_n) \geq f(\sqrt{2})$ d'où $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$. La propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence, on a $f(u_n) \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - \sqrt{2} \\ &= \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2} \\ &= \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2} \\ &\leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2} \text{ car } u_n \geq \sqrt{2} \geq 1 \end{aligned}$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

3. L'inégalité à montrer est vraie pour $n = 0$ car $|u_0 - \sqrt{2}| \leq 1$. La propriété est donc initialisée. On suppose qu'il existe un entier n tel que $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$

On a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \sqrt{2}| &\leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2} \text{ d'après la question précédente} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{2^n-1}} \right)^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{2(2^{2^{n+1}-2})} \\ &\leq \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n .

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{2}) = 0$, d'après l'inégalité que l'on vient de montrer.

Correction 15 Les points fixes, et donc les limites possibles sont les réels l tels que

$$\frac{l^2}{(1+l)^4} = l \Leftrightarrow l^2 = (l+1)^4 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } (1+l)^4 = 1.$$

On a donc $l = 0$ ou $l = -2$.

On remarque que la suite est à termes positifs à partir du rang 1. L'unique limite possible est donc 0.

De plus, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{(1+u_n)^4}.$$

Or, pour tout $n \geq 1$, $1 + u_n > 1$ donc

$$(1 + u_n)^4 > 1 + u_n > u_n.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme la suite est minorée, elle est convergente et nous avons montré que l'unique limite possible est 0.

Correction 16 On a $u_0 \geq 1$, il est alors clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$. On pose $f(x) = 1 + \ln(x)$, on va étudier f sur $[1, +\infty[$. La fonction est croissante, d'image $[1, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc monotone et minorée. On pose $g(x) = f(x) - x$. On a

$$g'(x) = \frac{1-x}{x},$$

donc $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 1$. Comme $g(1) = 0$, on en déduit que g est négative. Par suite, quelque soit $u_0 \in \mathbb{R}$, on a $u_1 - u_0 \leq 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée, on sait qu'elle converge. Sa limite est l'unique point fixe de $f : 1$.

Correction 17 On pose $f(x) = \ln x + x$. La fonction f est strictement croissante et son image est $\mathbb{R}$, elle est donc bijective ce qui nous assure que la suite est bien définie.

De plus, on a :

$$f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$$

donc, par croissance de f ,

$$x_n < x_{n+1}$$

ce qui montre que la suite est croissante. On sait donc qu'elle admet une limite. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite réelle l alors, par continuité de f ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(l),$$

or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite réelle, elle tend vers $+\infty$.

Correction 18 1. On pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$. La fonction f_n ainsi définie est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective. Comme, de plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = n$, on sait que 1 est un élément de $f([0, 1])$ donc il admet un unique antécédent dans $[0, 1]$.

2. Pour étudier la monotonie de la suite, on remarque que, pour tout x , on a $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. On a donc

$$f_n(x_n) \leq f_{n+1}(x_n).$$

Or $f_n(x_n) = 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$, donc

$$f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_n),$$

ce qui permet de conclure que $x_{n+1} \leq x_n$, par croissance de la fonction f_n . La suite ainsi définie est donc décroissante.

3. On calcule : $f_n(1/2) = \frac{1}{2} \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$. On a donc $f_n(1/2) < f_n(x_n)$

donc, par croissance de f_n , $x_n \geq \frac{1}{2}$.

4. On sait que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, elle est donc convergente. Notons l sa limite réelle. On a $f_n(x) = x \frac{1 - x^n}{1 - x}$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = \frac{l}{1 - l} \text{ car } l \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]. \text{ Comme, de plus, } f_n(x_n) = 1, \text{ on a, par unicité de la limite, } \frac{l}{1 - l} = 1 \text{ d'où } l = \frac{1}{2}.$$

Correction 19 On note l_1 , l_2 et l_3 les limites respectives des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite $(u_{10n})_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois une suite extraite de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n \in \mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, on a donc $l_1 = l_3$. De même, la suite $(u_{10n+5})_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n \in \mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, on a donc $l_2 = l_3$. On en déduit que $l_1 = l_2$ donc les suites extraites des indices pairs et impairs convergent vers la même limite. On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Correction 20 On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l . Par définition de la limite, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in \left] l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \right[$. Or il y a au plus un unique dans l'intervalle ouvert $\left] l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \right[$, la suite est donc stationnaire à partir du rang N , égale à cet entier.

Correction 21 1. On a $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Pour tout k dans $[n+1, 2n]$, on

a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ donc, en sommant les inégalités :

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. On sait que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, elle admet donc une limite. Si cette limite est réelle, notons-la l , alors $H_{2n} - H_n \rightarrow l - l = 0$, ce qui est impossible car cette différence est minorée par 2. On en déduit que la suite tend vers $+\infty$.

3. On a $H_{2n} - \ln(2n) \rightarrow \gamma$ donc $H_{2n} - \ln(2n) - H_n + \ln(n) \rightarrow 0$. On en déduit que $H_{2n} - H_n \rightarrow \ln(2)$.

Correction 22 1. On sait que pour tout $k > 1$, on a $k^2 \geq k^2 - k$ donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}$, ce qu'on peut aussi écrire :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Pour $r \geq 2$, on a $k^r \geq k^2$ donc $\frac{1}{k^r} \leq \frac{1}{k^2}$. On en déduit que pour tout $k > 1$ et tout $r \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{k^r} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

On en déduit, on sommant les inégalités entre 2 et n , que :

$$S_n(r) \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n-1} \leq 2.$$

La suite est donc majorée. Comme, on a :

$$S_{n+1}(r) - S_n(r) = \frac{1}{(n+1)^r} \geq 0,$$

la suite est croissante, on en déduit qu'elle converge.

2. Pour tout k entre 1 et n , on a $\frac{1}{k^{r+1}} \leq \frac{1}{k^r}$. En sommant entre 1 et n , on obtient

$$S_n(r+1) \leq S_n(r), \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit, en passant à la limite, que $\sigma_{r+1} \leq \sigma_r$ donc la suite $(\sigma_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. (a) Pour tout $x \in [k-1, k]$, on a $\frac{1}{k^r} \leq \frac{1}{x^r}$. On intègre entre $k-1$ et k , on obtient :

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{k^r} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^r},$$

ce qui implique $\frac{1}{k^r} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^r}$. On somme ces inégalités entre 2 et n , on obtient :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^r} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^r},$$

ce qui se réécrit, grâce à la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^r} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^r}.$$

On a ajouté 1 de chaque côté :

$$S_n(r) \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^r}.$$

Comme il est clair que $S_n(r) \geq 1$, on a l'encadrement souhaité.

(b) On a $\int_1^n \frac{dx}{x^r} = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_1^n = \frac{1}{(1-r)n^{r-1}} - \frac{1}{1-r}$. On a donc :

$$1 \leq S_n(r) \leq \frac{1}{(1-r)n^{r-1}} - \frac{1}{1-r} + 1.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$. On obtient :

$$1 \leq \sigma_r \leq 1 + \frac{1}{r-1}.$$

Enfin, on fait tendre r vers $+\infty$. Par le thm d'encadrement, on en déduit que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \sigma_r = 1$.

Correction 23 1. $n^2 - \ln(n) + e^{1/n} \sim n^2$

2. $2^n - e^n + \ln(n) - \cos(3n^2) \sim e^n$

3. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$

Correction 24 1. oui, elle tend vers 0.

2. non, elle tend vers $+\infty$ par le thm de croissances comparées.

Correction 25 • $u_n = \sqrt{n(n+a)} - n = \frac{na}{\sqrt{n^2+na+n}} = \frac{a}{\sqrt{1+a/n+1}}$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{a}{2}.$$

• $v_{4p+1} = \frac{4p+1}{2} \rightarrow +\infty$ mais $w_{2p} = 0, \forall p$ donc (w_n) ne peut pas converger.

• On a $\frac{2^n}{n!} \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$ donc par continuité de cosinus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$.

• $z_n = \underbrace{\frac{n^2}{n^2 + \sqrt{n}}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}}_{\rightarrow 0}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 1$.

• $a_n \sim \frac{1}{n}$ donc $a_n \rightarrow 0$.

• $b_n \sim n \sin \frac{1}{n}$ donc $b_n \rightarrow 1$.

• $c_n \sim n^4 e^{-n}$ donc $c_n \rightarrow 0$ par croissances comparées.

Correction 26 On a :

$$(a^n + b^n)^{1/n} = b \left(\left(\frac{a}{b} \right)^n + 1 \right)^{1/n},$$

et

$$\left(\left(\frac{a}{b} \right)^n + 1 \right)^{1/n} = \exp \left(\frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + 1 \right) \rightarrow 1$$

donc $v_n \rightarrow b$.

Correction 27 On a :

$$\lfloor n\sqrt{n} \rfloor > n\sqrt{n} - 1,$$

donc :

$$\frac{\lfloor n\sqrt{n} \rfloor}{n} > \frac{n\sqrt{n} - 1}{n},$$

et, par croissance de la partie entière,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor n\sqrt{n} \rfloor}{n} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n\sqrt{n} - 1}{n} \right\rfloor > \frac{n\sqrt{n} - 1}{n} - 1.$$

On a donc :

$$u_n > \sqrt{n} \left(\frac{n\sqrt{n} - 1}{n} - 1 \right) = \sqrt{n} \left(\frac{n\sqrt{n} - n - 1}{n} \right),$$

or, $\sqrt{n} \left(\frac{n\sqrt{n} - n - 1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc, par minoration, $u_n \rightarrow +\infty$.

Correction 28 On encadre le terme général:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit, par encadrement, que la suite converge vers 0.

Correction 29 Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq \frac{t^n}{(1+t)^2} \leq t^n,$$

donc

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n dt}{(1+t)^2} \leq \int_0^1 \frac{t dt}{t^n}.$$

Comme $\int_0^1 \frac{t dt}{t^n} = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, on obtient :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Correction 30 On encadre :

$$\forall n > 0, \frac{n}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2},$$

donc

$$\forall n > 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit que :

$$\forall n > 0, 0 < \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < 1,$$

donc $\left\lfloor \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\rfloor = 0$. On a donc :

$$\forall n > 0, v_n = 0,$$

ce qui montre que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (puisqu'elle est constante) et que sa limite est nulle.

Correction 31 On a $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{2n}}$ donc $u_n \rightarrow +\infty$.

Correction 32 L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ possède 1 et -2 pour racines, on sait donc qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 1^n + \beta (-2)^n = \alpha + \beta (-2)^n.$$

Déterminons α et β à l'aide des premiers termes:

$$u_0 = 0 = \alpha + \beta,$$

et

$$u_1 = 3 = \alpha - 2\beta.$$

On a donc $\alpha = -\beta$ et $\alpha = 1$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n = 1 + (-2)^{n+1}.$$

Correction 33 On écrit l'équation caractéristique :

$$r^2 - r + 1 = 0.$$

Ses racines sont $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u_n = \alpha \cos \frac{n\pi}{3} + \beta \sin \frac{n\pi}{3}.$$

On a $u_0 = 1 = \alpha$ et $u_1 = 2 = \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \beta \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\beta = \sqrt{3}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \cos \frac{n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

Correction 34 L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$ dont les racines sont -1 et 2 . Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha (-1)^n + \beta 2^n.$$

On a $u_0 = 0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = 1 = -\alpha + 2\beta$. On en déduit que $\beta = \frac{1}{3} = -\alpha$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n).$$

Correction 35 On cherche α tel que $(u_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique. On trouve $\alpha = \frac{1}{2}$, on a donc $\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$ géométrique de raison -3 et de premier terme $u_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right) (-3)^n,$$

d'où, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{2} + \frac{1}{2}.$$

Correction 36 On a, pour $n \geq 2$, $u_{n+1} = (n+1)nu_n = (n+1).n^2(n-1)u_{n-1}$. On en déduit que $u_{n+1} = (n+1).(n!)^2.u_0$ donc

$$\forall n \geq 1, u_n = 2n((n-1)!)^2.$$

Correction 37 On suppose, dans un premier temps que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} u_k \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n u_k + \frac{u_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} v_n + \frac{u_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} (-v_n + u_{n+1})$$

Or,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_n,$$

donc $v_n \leq u_n \leq u_{n+1}$ par croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On en déduit que $v_{n+1} - v_n$ est positif donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc $(-v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi puis $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On peut aussi (un peu plus tordu, je vous l'accorde) écrire :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \frac{u_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \frac{u_{n+1}}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \left(\left(\sum_{j=k}^n (u_j - u_{j+1}) \right) + u_{n+1} \right) \\ &= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n (u_j - u_{j+1}) + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n u_{n+1} \\ &= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n (u_j - u_{j+1}) - \frac{u_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n (u_{j+1} - u_j) \end{aligned}$$

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, alors pour tout j , $(u_{j+1} - u_j)$ est de signe constant et $v_{n+1} - v_n$ est alors également du même signe donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également monotone, de même monotonie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction 38 On a $u_{n^2} = \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor - \sqrt{n^2} = 0$ et

$$-1 < \lfloor \sqrt{n^2 + 1} \rfloor - \sqrt{n^2 + 1} \leq 0.$$

De plus, $\lfloor \sqrt{n^2 + 1} \rfloor - \sqrt{n^2 + 1} \neq 0$ car si c'était le cas, alors $n^2 + 1$ serait un entier. On aurait alors $n^2 + 1 = m^2$ d'où $n^2 - m^2 = 1 = (n - m)(n + m)$ ce qui est impossible pour $n > 1$. On a donc :

$$-1 < \lfloor \sqrt{n^2 + 1} \rfloor - \sqrt{n^2 + 1} < 0.$$

ce qui implique, par définition de la partie entière, que $u_{n^2+1} = -1$. On a trouvé deux suites extraites de (u_n) possédant des limites différentes donc la suite n'admet pas de limite.

Correction 39 On a $u_0 > 0$, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On pose $f(x) = \frac{1}{x+1}$, on étudie cette fonction sur $\mathbb{R}_+^*$. On commence par déterminer si f possède des points fixes. On a $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$. Il y a deux solutions :

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

mais seule $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ est positive. On note $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Elle est décroissante, on a le tableau de variations suivant :

x	0	α	$+\infty$
f	1	0	0

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$ donc la suite est bornée. De plus, $f \circ f$ est croissante donc la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. On peut donc affirmer qu'elle est convergente quelque soit la valeur de u_0 .

Déterminons ses limites possibles. On a

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} &= x \\ \Leftrightarrow \frac{1+x}{2+x} &= x \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

L'unique limite (positive) possible est α . On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \alpha$ puis, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = f(\alpha) = \alpha$ par continuité de f . Enfin, les deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Correction 40 1. On note $f : x \mapsto e^x + x$. Alors f est strictement croissante, son image vaut $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\frac{1}{n+1}$ admet un unique antécédent que l'on note x_n .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ donc $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. Comme f est croissante, on en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Si elle ne converge pas, elle tend vers $-\infty$. On aurait alors $f(x_n) \rightarrow -\infty$ par continuité de f . Or $f(x_n) \rightarrow 0$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Correction 41 1. La fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. Comme f est croissante, on en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Enfin, on remarque que $f(0) = 0 < \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, toujours pas croissance de f , $x_n > 0$ pour tout n . La suite est donc décroissante et minorée, on peut affirmer qu'elle converge. On note l sa limite. Par continuité de f , on a $f(x_n) \rightarrow l^3 + l$. Or $f(x_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Par unicité de la limite, on a $l + l^3 = 0$. On en déduit que $l = 0$ et la suite converge vers 0.

Correction 42 1. La fonction $x \mapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur I_n , de dérivée $x \mapsto \tan^2 x$ donc f est croissante. On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + n\pi} = -\infty$

d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{\pi}{2} + n\pi$	$\frac{\pi}{2} + n\pi$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

La fonction f est bijective de I_n dans $\mathbb{R}$, elle s'annule donc une unique fois sur I_n . On en déduit que l'équation (E) admet une unique solution dans I_n .

2. On a $x_n \geq n\pi - \frac{\pi}{2}$ donc, par le thm de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

3. On aimerait poser $v_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ et appliquer la définition de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à savoir $\tan(x_n) = x_n$ mais

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \in]0, \pi[,$$

sur lequel $\tan$ n'est pas définie.

On reprend le tableau de variations de f et on fait apparaître $f(n\pi) = -n\pi$:

x	$-\frac{\pi}{2} + n\pi$	$n\pi$	$\frac{\pi}{2} + n\pi$
$f'(x)$	+		
f	$-\infty$	$-n\pi$	$+\infty$

et comme $f(x_n) = 0$ et f strictement croissante, on en déduit que $x_n \geq n\pi$:

x	$-\frac{\pi}{2} + n\pi$	$n\pi$	x_n	$\frac{\pi}{2} + n\pi$
$f'(x)$	+			
f	$-\infty$	$-n\pi$	0	$+\infty$

On pose $v_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Comme $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, on a $v_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
On a $\tan(v_n) = \tan(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}) = \tan(x_n - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\tan(x_n)} = -\frac{1}{x_n}$.

On a donc $v_n = \arctan\left(-\frac{1}{x_n}\right)$ car $v_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par continuité de $\arctan$, on en déduit que $v_n \rightarrow 0$.

Correction 43 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^3 + nx$. Cette fonction est continue et impaire. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $\text{Im}(f_n) = \mathbb{R}$. On en déduit que 1 admet un antécédent par f_n . De plus, elle est strictement croissante donc injective, 1 admet donc un unique antécédent par f_n , on le note u_n .

2. On a $f_n(1) = 1 + n$ et $f_n(0) = 0$ donc pour $n \geq 1$, $f_n(1) > f_n(u_n) > 0$. Par croissance de (u_n) , on a $0 < u_n < 1$. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = x^3 + nx + x = f_n(x) + x$ donc pour tout $x > 0$, on a

$$f_{n+1}(x) > f_n(x).$$

On a donc

$$f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n), \text{ or } f_n(u_n) = 1 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

on a donc

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1}),$$

et, par croissance de f , on en déduit $u_{n+1} < u_n$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc convergente.

Notons l sa limite. Si $l \neq 0$, alors $u_n^3 + nu_n \rightarrow +\infty$. Or $f_n(u_n) = 1$, on a donc une contradiction. On en déduit que la limite est nulle.

Correction 44 On commence par s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n > 0$, ce qui est clair par une récurrence immédiate. Les deux suites sont donc bien définies.

On remarque ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} \geq a_{n+1}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \geq a_n,$$

et ce résultat est également vrai au rang 0 par hypothèse.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, alors

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n,$$

puisque $a_n \leq b_n$. Ainsi, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De même, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2}$ donc $(a_n > 0)$, $a_{n+1} \geq a_n$ et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On se retrouve alors avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0.$$

On en déduit que les deux suites sont bornées donc convergentes par le théorème de limite monotone. Enfin, si on note l et l' les limites de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $b_{n+1} \rightarrow l'$ et $b_{n+1} \rightarrow \frac{l+l'}{2}$ donc, par unicité de la limite, $l = l'$ et les deux suites tendent vers la même limite.

Correction 45 1. On sait qu'il existe N tel que $\forall n \geq N$, $u_n \geq \frac{a}{2}$. On a donc,

$$\text{pour } n \geq N, \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^n u_k \geq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + (n - N + 1) \frac{a}{2}.$$

Par le thm de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$.

2. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} - v_n = a$ avec $a > 0$. Alors, d'après la question précédente, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = +\infty,$$

or $\sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.