

TD 10: Systèmes linéaires et calcul matriciel .

1 Rang d'un système

Exercice 1.

Déterminer le rang du système

$$\begin{cases} x + 2y + t &= a \\ y - z + t &= b \\ x + 2y + t &= c \\ x + 3y - z + 2t &= d \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer le rang des systèmes suivants:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 &= x \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= y \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= z \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 &= x \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= y \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= z \end{cases} \quad \begin{cases} a^2x_1 + ax_2 + x_3 &= x \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= y \\ x_1 + ax_2 + a^2x_3 &= z \end{cases}$$

2 Résolution de systèmes

Exercice 3.

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues (x, y, z) :

$$\begin{cases} x + y + 3z &= 5 \\ x - y - z &= 1 \\ x &+ z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y + 2z &= a \\ -x + 2y - 3z &= b \\ x + 2y + z &= c \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y - 2z &= 0 \\ x + y - z &= -2 \\ x + 2y + z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 4.

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues (x, y, z, t) :

$$\begin{cases} x + y + 4z + 7t &= b_1 \\ x + y + 4z + 5t &= b_2 \\ x + y + 3z + 2t &= b_3 \\ x + y + z + t &= b_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z + 2t &= a \\ x - y + z - t &= b \\ 4x - y + 2z - t &= c \end{cases}$$

Exercice 5. la matrice circulante:

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les solutions du système d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ en fonction de λ :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}$$

Exercice 6. la matrice compagnon

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. A quelle condition sur λ le système homogène suivant possède-t-il des solutions non nulles? Montrer qu'alors ces solutions sont paramétrées par exactement une variable libre.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} + \lambda \end{pmatrix}$$

3 Produit matriciel

Exercice 7.

Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de deux façons différentes. (Quelle est la plus judicieuse ?)

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B)$ et $T = (A + B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A + B) + (-A + B)^2$

Exercice 9.

Montrer que si A est inversible et commute avec B , alors A^{-1} commute avec B .

Exercice 10.

Soit $B = (i)_{1 \leq i, j \leq n}$. Calculer B^2 .

Exercice 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq n}$, calculer A^2 .

Exercice 12.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(^tAA) = 0$. Montrer que A est la matrice nulle.

4 Détermination de l'inversibilité d'une matrice

Exercice 13.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

Exercice 14.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 15.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

5 Calcul de l'inverse

Exercice 16.

Calculer l'inverse de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17.

Calculer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 18.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - I_n = 0$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

6 Calcul de puissances

Exercice 19.

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$. Calculer J^r pour tout entier $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 20.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^r pour $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 21.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(A + I_3)^3$ est la matrice nulle.
2. En déduire une expression de A^n pour tout entier n .

Exercice 22.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la puissance n -ème de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(On calculera $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, ..., on devinera les coefficients de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on le vérifiera, si besoin par récurrence.)

7 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 23.

Quel est le rang du système

$$\begin{cases} x_2 + x_3 & = a \\ x_3 + x_4 + x_5 & = b \\ x_5 & = c \\ x_5 + x_6 + x_7 & = d \end{cases}$$

Exercice 24.

Donnez le rang des systèmes homogènes suivants:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \dots + (n+1)x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ nx_1 + (n+1)x_2 + (n+2)x_3 + \dots + (2n-1)x_n & = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + \dots + x_n & = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \dots + x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + ax_{n-1} + x_n & = 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + ax_n & = 0 \end{cases}$$

Exercice 25.

Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 :

$$\begin{aligned} (S_1) \begin{cases} x + 3y + 4z + 7t & = b_1 \\ x + 3y + 4z + 5t & = b_2 \\ x + 3y + 3z + 2t & = b_3 \\ x + y + z + t & = b_4 \end{cases} & \quad (S_2) \begin{cases} x + 3y + 5z + 3t & = b_1 \\ x + 4y + 7z + 3t & = b_2 \\ y + 2z & = b_3 \\ x + 2y + 3z + 2t & = b_4 \end{cases} \\ (S_3) \begin{cases} x + y + 2z - t & = b_1 \\ -x + 3y + t & = b_2 \\ 2x - 2y + 2z - 2t & = b_3 \\ 2y + z & = b_4 \end{cases} & \quad (S_4) \begin{cases} x + 2y + z + 2t & = b_1 \\ -2x - 4y - 2z - 4t & = b_2 \\ -x - 2y - z - 2t & = b_3 \\ 3x + 6y + 3z + 6t & = b_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 26.

Résoudre pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ les systèmes :

$$T_1 : \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & & = & 1 \\ & \frac{1}{2}x_2 & & = & -1 \end{cases} \quad \text{puis } T_2 : \begin{cases} -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 27.

Résoudre :

$$\begin{aligned} 1. \text{ dans } \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2y - z & = & 1 \\ -2x - 4y + 3z & = & -1 \\ x + y - 3z & = & -6 \end{cases} & \quad 4. \text{ dans } \mathbb{R}^4 : \begin{cases} 2x - z + t & = & 2 \\ -2y + z + t & = & 1 \\ 2x + 2y - 2z & = & 1 \\ 2x - 2y + 2t & = & 3 \end{cases} \\ 2. \text{ dans } \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + z & = & 1 \\ y + z & = & 0 \\ x + y & = & 1 \\ 2x + 3y & = & 0 \end{cases} & \quad 5. \text{ dans } \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + y + 3z & = & 5 \\ x - y - z & = & 1 \\ x + z & = & 3 \end{cases} \\ 3. \text{ dans } \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 3. & \end{aligned}$$

Exercice 28.

Soit $B = (b_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Calculer $\text{Tr}(ABA)$ où A est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ avec uniquement des 1 comme coefficients.

Exercice 29.

Donner l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 30.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
- Calculer A^2 et remarquer que $A^2 = A + 2I_3$. Retrouver son inverse.

Exercice 31.

Calculer M^r pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

8 Une fois qu'on est à l'aise**Exercice 32.**

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

- Calculer le coefficient d'indice (r, l) de la matrice $AE_{ij}B$.
- En déduire que si AXB est la matrice nulle pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, alors A ou B est nulle.

Exercice 33.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(K)$. On suppose que pour tout $X \in M_n(K)$, on a $(XA)^2 = (0)$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 34. 🧩

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle centre de $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble Z des matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $Z = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } \forall B \in M_n(\mathbb{K}), AB = BA\}$.

1. Pour $(k, l) \in \{1, \dots, n\}^2$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A pour que les matrices A et $E_{k,l}$ commutent.
2. En déduire que le centre Z de $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires.

Exercice 35.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A + A^{-1} = I_n$. Pour tout entier k , on note $A^{-k} = (A^{-1})^k$. Montrer que pour tout entier k , il existe un réel μ_k tel que $A^k + A^{-k} = \mu_k I_n$ et déterminer μ_k .

Exercice 36.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

Calculer M_{ab}^r pour tout entier r .

Memo

- Comment déterminer le rang d'un système?
En l'échelonnant et en comptant le nombre d'équations restantes
- Comment déterminer à quelle(s) condition(s) un système a des solutions?
En l'échelonnant et en lisant les dernières lignes dont le membre de gauche est nul
- Comment résoudre un système linéaire?
 - En faisant des opérations élémentaires (à préciser) sur les lignes
 - En faisant le pivot de Gauss puis en substituant.
- Comment déterminer le rang d'une matrice?
 - Échelonner la matrice
 - Raisonner sur les lignes/colonnes en petite dimension
- Comment déterminer si une matrice est inversible?
 - Observer la matrice
 - Déterminer si le système associé possède une unique solution
- Comment déterminer l'inverse d'une matrice A ?
 - Résoudre le système $AX = Y$
 - Faire des opérations élémentaires sur les lignes
 - Trouver son inverse
- Comment déterminer la puissance d'une matrice?
 - Prendre la puissance des coefficients diagonaux
 - Utiliser la formule du binôme de Newton
 - "Intuiter" une formule et la montrer par récurrence
 - Remarquer que la matrice s'écrit PMP^{-1}
- Comment multiplier des matrices de taille n ?
Revenir à la définition du produit matriciel

Correction du TD n 10

Correction 1 On fait $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_1$, on obtient

$$\begin{cases} x + 2y + t &= a \\ y - z + t &= b \\ 0 &= c - a \\ 0 &= d - a - b \end{cases}$$

On en déduit que le rang du système est 2.

Correction 2 • Si $a = 1$ le rang vaut 1 car toutes les lignes du système sont identiques. Si $a \neq 1$, le rang vaut 2 car $L_1 = L_3$ (et L_1 et L_2 non colinéaires).

- Si $a = 1$ le rang vaut 1 car toutes les lignes du système sont identiques.
Si $a = -2$, on a $L_1 + L_2 + L_3 = 0$, et L_1 et L_2 non colinéaires donc le rang vaut 2.
Si $a \notin \{-2, 1\}$, on triangularise le système et on constate que le rang vaut 3.

- On fait $L_3 \leftrightarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_2$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & z \\ 0 & 1-a & a-a^2 & y-z \\ 0 & a-a^2 & 1-a^3 & x-a^2 y \end{array} \right)$$

On fait ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - aL_2$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & z \\ 0 & 1-a & a-a^2 & y-z \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x-a^2 y - ay + az \end{array} \right)$$

On en déduit que si $a = -1$ le rang vaut 2, si $a = 1$, le rang vaut 1, sinon le rang vaut 3.

Correction 3 L'ensemble des solutions du premier système est $\{(3-z, 2-2z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Le deuxième système a une unique solution $\left(\left(\frac{c+4a+3b}{10}\right), \left(\frac{-2a+b+7c}{20}\right), \left(\frac{-a-2b+c}{5}\right)\right)$.

Le troisième système a une unique solution $(1, -1, 2)$.

Correction 4 • La condition de compatibilité est $9b_2 - 5b_1 + 2b_4 - 6b_3 = 0$. Si elle est vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\left\{ \left(-\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2} + \frac{3b_4}{2} - y, y, -\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, \frac{b_1 - b_2}{2} \right), y \in \mathbb{R} \right\}$$

- La condition de compatibilité est $a + 3b - c = 0$. Si elle est vérifiée, les solutions sont

$$\left\{ \left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{3} - \frac{1}{3}z, \frac{a}{3} - \frac{b}{3} + \frac{2}{3}z - t, z, t \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Correction 5 On montre facilement que $x_1 = \lambda^n x_1$ donc

- Soit $\lambda^n \neq 1$ donc $x_1 = 0$ et dans ce cas $x_i = 0, \forall i$ donc la seule solution est la solution nulle.
- Soit $\lambda^n = 1$ et dans ce cas les solutions sont les n -uplets de la forme $x(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}), x_1 \in \mathbb{R}$.

Correction 6 On fait $L_1 \leftarrow L_1 \sum_{i=2}^n (-\lambda)^{i-1} L_i$, on obtient:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \Delta \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} + \lambda \end{pmatrix}$$

avec $\Delta = -a_0 + a_1\lambda - a_2\lambda^2 + \dots + (-1)^{n-2}\lambda^{n-1}a_{n-1} + (-1)^{n-1}\lambda^n = -\left((- \lambda)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda)^n a_n\right)$ On permute ensuite L_n et L_1 et on obtient un système triangulaire dont les coefficients diagonaux valent 1 sauf le dernier qui vaut $-\left((- \lambda)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda)^n a_n\right)$. On a donc des solutions non-nulles si $-\lambda$ est racine du polynôme $\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$. Si c'est le cas, la dernière variable est libre et elle paramètre les solutions.

Correction 7 On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a aussi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc, sans aucun calcul,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est la deuxième méthode la plus judicieuse.

Correction 8 On a $S = 5AB - 3BA - 5B^2$ et $T = A^2 - B^2 - 3AB - BA + 2BA^2 - 2A^2B$

Correction 9 On suppose $AB = BA$, on a alors $A^{-1}AB = A^{-1}BA$ puis $B = A^{-1}BA$ car $A^{-1}A = I$. Enfin, on obtient $BA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$ donc $BA^{-1} = A^{-1}B$ et A^{-1} commute avec B .

Correction 10 On pose $B^2 = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a $b_{ij} = i$, d'après la formule du produit matriciel, on a donc, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{kj} =$

$$\sum_{k=1}^n ik = \frac{n(n+1)}{2}i.$$

On en déduit que $B^2 = \frac{n(n+1)}{2}B$.

Correction 11 On pose $A^2 = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a $a_{ij} = \frac{i}{j}$, d'après la formule du produit matriciel, on a donc, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} =$

$$\sum_{k=1}^n \frac{i}{k} \frac{k}{j} = n \frac{i}{j}.$$

On en déduit que $A^2 = nA$.

Correction 12 Notons $A = (a_{ij})$, ${}^tA = (b_{ij})$ et ${}^tAA = (c_{ij})$. On sait que, pour tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki}.$$

Or, $b_i k = a_{ki}$, par définition de la transposée. On a donc :

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2,$$

d'où :

$$\text{Tr}(^t AA) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2.$$

On a supposé $\text{Tr}(^t AA) = 0$. Comme c'est une somme nulle de réels positifs, cela implique qu'ils sont tous nuls. On a donc :

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ki} = 0,$$

ce qui montre que la matrice est nulle.

Correction 13 non car la somme des deux premières lignes est égale à la troisième ligne, on en déduit que le déterminant est nul donc la matrice n'est pas inversible.

Correction 14 A n'est pas inversible car $C_2 - C_1 = C_3$ donc son déterminant est nul.

On a

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ en faisant } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la deuxième ligne} \\ &= 3 \neq 0 \end{aligned}$$

la matrice B est donc inversible.

On a

$$\begin{aligned} \det(C) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ en faisant } L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ &= 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -21 \neq 0 \end{aligned}$$

La matrice est donc inversible.

On remarque que la dernière colonne de D est égale à deux fois la première colonne, on en déduit que D n'est pas inversible.

Correction 15 Le système associé est :

$$\begin{cases} x_2 &= b_1 \\ x_3 &= b_2 \\ \ddots & \\ x_1 &= b_n \end{cases}$$

Il est clair qu'il possède une unique solution $(b_n, b_1, \dots, b_{n-1})$ donc la matrice associée est inversible.

Correction 16 Le système associé à la matrice est :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + z &= b_1 \\ x + y &= b_2 \\ x - y + z &= b_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x + z &= b_1 \\ x + y &= b_2 \\ y &= b_1 - b_3 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y &= b_1 - b_3 \\ x &= -b_1 + b_2 + b_3 \\ z &= 2b_1 - b_2 - b_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x &= -b_1 + b_2 + b_3 \\ y &= b_1 - b_3 \\ z &= 2b_1 - b_2 - b_3. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction 17 Le système associé est :

$$\begin{cases} x_2 &= b_1 \\ x_3 &= b_2 \\ \ddots & \\ x_1 &= b_n, \end{cases}$$

et son unique solution est :

$$(x_1, \dots, x_n) = (b_n, b_1, \dots, b_{n-1})$$

On en déduit que l'inverse de la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction 18 On écrit

$$A(A + 2I_n) = I_n,$$

on peut alors affirmer que A est inversible et que son inverse est $A + 2I_n$.

Correction 19 On a $J^2 = nJ$ puis, par récurrence, pour tout $r \geq 1$, $J^r = n^{r-1}J$ (et $J^0 = I_n$).

Correction 20 On écrit $M = 2I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que I_3 commute avec toutes les matrices, en particulier avec N donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$M^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} N^k (2I_3)^{r-k} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} 2^{r-k} N^k.$$

Or,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N^3 = (0)$$

donc la somme se réduit à :

$$M^r = \sum_{k=0}^2 \binom{r}{k} 2^{r-k} N^k = 2^r I_3 + 2^{r-1} r N + 2^{r-2} \frac{r(r-1)}{2} N^2,$$

soit encore :

$$M^r = 2^r I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2^{r-1}r & -2^{r-1}r \\ 0 & 0 & 2^{r-1}r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{r-3}r(r-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$M^r = \begin{pmatrix} 2^r & 2^{r-1}r & 2^{r-3}r(r-5) \\ 0 & 2^r & 2^{r-1}r \\ 0 & 0 & 2^r \end{pmatrix}.$$

Correction 21 1. $A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A + I_3)^3 = 0_3$.

2. On peut appliquer le binôme de Newton puisque $(A + I_3)$ et $-I_3$ commutent. On a

$$\begin{aligned} A^n &= ((A + I_3) + (-I_3))^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (A + I_3)^k (-I_3)^{n-k} \\ &= (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1} (A + I_3) + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} (A + I_3)^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n(-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & n(-1)^{n-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Correction 22

$$A^2 = (0) \text{ donc } A^n = (0), \forall n \geq 2$$

$$B^2 = 3B \text{ donc } B^n = 3^{n-1}B, \forall n \geq 1.$$

$$C^2 = 2C \text{ donc } C^n = 2^{n-1}C, \forall n \geq 1.$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } D^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$E^3 = (0) \text{ donc } E^n = (0) \forall n \geq 3$$

Enfin, on a

$$F^4 = -F \text{ donc } F^5 = -F^2, F^6 = -F^3 \text{ puis } F^7 = F.$$

Si on prend $n = 3p + q$ avec $q \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on a $F^n = (-1)^p F^q$.

Correction 23 On triangularise le système en faisant $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ et $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$. On constate que le rang vaut 4.

Correction 24 Le rang du premier est équivalent à celui obtenu en faisant $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour $i = 2..n$ qui ressemble à ça :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ qui est aussi équivalent à } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (L_i \leftarrow L_2, i = 3..n)$$

Le rang est donc 2.

Pour le deuxième système, on obtient un système équivalent en faisant $L_n \leftrightarrow L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & & a & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait ensuite $L_i \leftarrow L_i - L_1, \forall i = 2..n-1$ et $L_n \leftarrow L_n - aL_1$ ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & a \\ 0 & a-1 & 0 & & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & & 0 & 1-a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & \dots & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Enfin, on fait $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=2}^{n-1} L_i$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & a \\ 0 & a-1 & 0 & & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & & 0 & 1-a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m \end{pmatrix}$$

avec $m = (1-a)(n-1+a)$. On a donc trois cas possibles :

- $a \neq 1$ et $a \neq 1-n$ et le système est de rang n .
- $a = 1-n$ et le système est de rang $n-1$.
- $a = 1$ et le système est de rang 1.

Correction 25 (S_1) : On a une solution unique pour tout b_1, b_2, b_3, b_4 , c'est

$$\left(\frac{b_1}{4}, \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2}, \frac{3b_4}{2}, \frac{5b_1}{4} - \frac{9b_2}{4} + \frac{3b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, -\frac{3b_1}{2} + \frac{5b_2}{2} - b_3, \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2} \right)$$

(S_2) : On a des solutions si $b_2 = b_1 + b_3$. L'ensemble des solutions est

$$\{(-2b_1 + 3b_4 - 11z, b_3 - 2z, b_1 - b_4 - b_3, z), z \in \mathbb{R}\}$$

(S_3) : On a des solutions si $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$ et $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$. L'ensemble des solutions est

$$\{(b_1 - 2b_4 + 3y + t, y, b_4 - 2y, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

(S_4) : On a des solutions si $b_2 = -2b_1$ et $b_3 = -b_1$ et $b_4 = 3b_1$. L'ensemble est alors

$$\{(b_1 - 2y - z - 2t, y, z, t), (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}$$

Correction 26 L'unique solution de T_1 est $(-3, -2, -1/2)$, les solutions de T_2 sont $\{(1, 2 - 2t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Correction 27 1. Il a comme unique solution $(1, 2, 3)$.

2. Il n'y a aucune solution.

3. Les solutions sont $\{(3 + 2y - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.
Ici, y et z sont variables libres.

4. On remarque que $L_1 + L_2 = L_4$ et $L_3 - L_1 = -L_2$ donc le système est équivalent aux deux premières lignes, les solutions sont

$$\left\{ \left(1 + \frac{z}{2} - \frac{t}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{t}{2}, z, t \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ici, z et t sont variables libres.

5. On remarque que $L_1 + L_2 = 2L_3$, les solutions sont $\{(3 - z, 2 - 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$,
ici z est variable libre.

Correction 28 On utilise la formule du produit matriciel. Le coefficient $(AB)_{ij}$ d'indice (i, j) du produit AB est égal à :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{kj},$$

car A est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On calcule maintenant le coefficient d'indice (i, j) du produit matriciel ABA :

$$\sum_{l=1}^n (AB)_{il} a_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kl}.$$

On a montré que tous les coefficients du produit matriciel ABA sont identiques, égaux à la somme de tous les coefficients de B . Si on note s la somme de tous les coefficients de B , on a donc :

$$ABA = sA$$

puis

$$\text{Tr}(ABA) = s\text{Tr}(A) = ns.$$

Correction 29 On écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On fait $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

On a désormais une matrice triangulaire supérieure. On va maintenant "éliminer" les coefficients au-dessus de la diagonale. Pour cela, on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right),$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 + L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

La matrice diagonale obtenue est égale à l'identité, on n'a donc pas besoin de diviser chaque ligne par la valeur du coefficient diagonal. On retrouve que l'inverse de la matrice donnée est :

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Correction 30 1. On résout le système linéaire associé, on trouve que A est in-

$$\text{versible et } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ On a } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3 \text{ On a donc } A^2 - A = 2I_3 \text{ donc } A(A - I_3) = 2I_3.$$

On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$ ce qui est le résultat trouvé à la question précédente.

Correction 31 On sait déjà que les coefficients diagonaux seront élevés à la puissance calculée et que toute puissance de M sera triangulaire supérieure. On calcule les premières puissances. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

et :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 26 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls sauf le coefficient en haut à gauche qui a été obtenu ainsi :

$$8 = 2 + 3 \times 2$$

et :

$$26 = 2 + 3 \times 8 = 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2.$$

On a envie de penser que le coefficient en haut à gauche de M^r est :

$$2(1 + 3 + \dots + 3^{r-1}) = 2 \frac{3^r - 1}{3 - 1} = 3^r - 1,$$

et qu'on a :

$$M^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^r - 1 \\ 0 & 2^r & 0 \\ 0 & 0 & 3^r \end{pmatrix}.$$

Supposons que c'est le cas et multiplions cette matrice par M pour voir si la formule est correcte au rang $r + 1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^{r+1} - 1 \\ 0 & 2^{r+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{r+1} \end{pmatrix},$$

nous avons montré, par récurrence, que :

$$M^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^r - 1 \\ 0 & 2^r & 0 \\ 0 & 0 & 3^r \end{pmatrix}.$$

Correction 32 1. On applique la formule du produit matriciel. On commence par calculer le coefficient $(AE_{ij})_{rs}$ d'indice (r, s) de la matrice AE_{ij} . Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^n a_{rk} (E_{ij})_{ks}.$$

Or, le coefficient d'indice (k, s) de E_{ij} est nul sauf si $i = k$ et $s = j$. On en déduit que :

$$(AE_{ij})_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq j \\ a_{ri} & \text{si } s = j. \end{cases}$$

On calcule maintenant le coefficient $(AE_{ij}B)_{rl}$ d'indice (r, l) de la matrice $AE_{ij}B$. Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^n (AE_{ij})_{rk} b_{kl}.$$

Seul le terme d'indice $k = j$ est non-nul, on a donc :

$$(AE_{ij}B)_{rl} = a_{ri} b_{jl}.$$

2. Supposons par l'absurde que B et A sont non-nulles. Alors, il existe deux coefficients $a_{i_0 j_0}$ et $b_{i_1 j_1}$ non-nuls. On considère alors le produit matriciel $AE_{j_0 i_1} B$. Par hypothèse, ce produit matriciel est nul. Or, d'après le calcul précédent, le coefficient d'indice (i_0, j_1) de la matrice $AE_{j_0 i_1} B$ est égal à $a_{i_0 j_0} b_{i_1 j_1}$, il est donc nul ce qui est une contradiction. On a montré, par l'absurde, que A ou B est la matrice nulle.

Correction 33 Comme on a $(AX)^2 = (0)$ pour tout X , c'est vrai en particulier pour une matrice élémentaire. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, alors $(E_{ij}A)^2 = (0)$. Explicitons la matrice $E_{ij}A$ puis son carré.

On écrit $A = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl} E_{kl}$. Alors

$$E_{ij}A = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl} E_{ij} E_{kl}.$$

Or pour $k \neq j$, $E_{ij} E_{kl} = (0)$, on en déduit que $\sum_{k=1}^n a_{kl} E_{ij} E_{kl} = a_{jl} E_{il}$. Ainsi,

$$E_{ij}A = \sum_{l=1}^n a_{jl} E_{il}.$$

Déterminons maintenant le carré de cette matrice :

$$(E_{ij}A)^2 = (E_{ij}A)(E_{ij}A) = (E_{ij}A) \sum_{l=1}^n a_{jl} E_{il} = \sum_{l=1}^n a_{jl} E_{ij} A E_{il} \quad (1).$$

Pour un l quelconque, on a, d'après le travail effectué ci-dessus :

$$E_{ij} A E_{il} = \left(\sum_{r=1}^n a_{jr} E_{ir} \right) E_{il} = \sum_{r=1}^n a_{jr} E_{ir} E_{il}.$$

Or $E_{ir} E_{il} = (0)$ si $r \neq l$, on a donc

$$E_{ij} A E_{il} = a_{jl} E_{il}.$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$(E_{ij}A)^2 = \sum_{l=1}^n a_{jl} a_{jl} E_{il}.$$

Cette matrice est nulle, par hypothèse. Tous ses coefficients doivent donc être nuls. On a donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket a_{ji} a_{ji} = 0.$$

En particulier, on a $a_{ji}^2 = 0$ donc $a_{ji} = 0$. Ceci étant valable pour tout (i, j) , on en déduit que A est la matrice nulle.

Correction 34 1. On écrit $A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} E_{ij}$. On a

$$A E_{kl} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} E_{ij} E_{kl} = \sum_{i=1}^n a_{ik} E_{il}$$

car tous les termes pour $j \neq k$ sont nuls et $E_{ij} E_{jl} = E_{il}$.

De même, on a

$$E_{kl} A = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} E_{kl} E_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{lj} E_{kj}$$

car tous les termes pour $i \neq l$ sont nuls et $E_{kl} E_{lj} = E_{kj}$.

On a donc

$$A E_{kl} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ (0) & \vdots & (0) \\ a_{nk} \end{pmatrix} \text{ et } E_{kl} A = \begin{pmatrix} (0) & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{l1} & (0) & \dots & (0) \end{pmatrix}$$

où seule la l ème colonne est non nulle pour $A E_{kl}$ et seule la k ème ligne est non nulle pour $E_{kl} A$. Les deux matrices sont égales si leurs coefficients sont identiques c'est-à-dire :

- $a_{kk} = a_{ll}$ (le coefficient d'indice (k, l) des deux matrices)
- $a_{ik} = 0$ pour $i \neq l$ (les coefficients extra diagonaux de AE_{kl})
- $a_{lj} = 0$ pour $j \neq k$ (les coefficients extra diagonaux de $E_{kl}A$)

2. On suppose $A \in Z$. Alors A commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$. En particulier, elle commute avec toutes les matrices élémentaires. On a donc $AE_{kl} = E_{kl}A$ pour tout couple $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. D'après la question précédente, on en déduit que

- $a_{ik} = 0$ pour tout $i \neq l$, pour tout k , autrement dit, les coefficients extra diagonaux de la k ème colonne sont nuls. Ceci étant vrai pour tout k , la matrice est diagonale
- $a_{kk} = a_{ll}$ pour tout (k, l) donc tous les coefficients diagonaux ont la même valeur.

On en déduit que A est de la forme λI_n donc $Z = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$, soit l'ensemble des matrices scalaires.

Correction 35 On procède par récurrence double sur k . Pour tout entier k , on note $HR(k) : \exists k \in \mathbb{R}, A^k + A^{-k} = \mu_k I_n$. Pour $k = 0$, on a $A^0 + A^{-0} = 2I_n$ donc $HR(0)$ est vraie et $\mu_0 = 2$. Pour $k = 1$, on a $A + A^{-1} = I_n$ donc $HR(1)$ est vraie et $\mu_1 = 1$.

Soit $k \geq 1$ un entier tel que $HR(k)$ et $HR(k-1)$ sont vraies. Montrons que $HR(k+1)$ est vraie.

On sait qu'il existe $\mu_k \in \mathbb{R}$ tel que $A^k + A^{-k} = \mu_k I_n$. On multiplie l'égalité par A d'une part, et par A^{-1} d'autre part. On obtient :

- $A^{k+1} + A^{-k+1} = \mu_k A$
- $A^{k-1} + A^{-k-1} = \mu_k A^{-1}$

donc en sommant les deux inégalités :

$$A^{k+1} + A^{-(k+1)} + A^{k-1} + A^{-(k-1)} = \mu_k (A + A^{-1}).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence au rang $k-1$, on obtient :

$$A^{k+1} + A^{-(k+1)} = \mu_k I_n - \mu_{k-1} I_n.$$

On a donc bien l'existence d'un réel μ_{k+1} tel que $A^{k+1} + A^{-(k+1)} = \mu_{k+1} I_n$.

De plus, $\mu_{k+1} = \mu_k - \mu_{k-1}$ donc, d'après l'étude des suites récurrentes d'ordre 2, on sait qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \mu_k = \alpha \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$. En utilisant $\mu_0 = 2$ et $\mu_1 = 1$, on obtient $\alpha = 2$ et $\beta = 0$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k + A^{-k} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) I_n.$$

Correction 36 Soit $r \in \mathbb{N}$. On pose $M_{ab} = bJ + (a-b)I$ avec J la matrice avec uniquement des 1. On sait que $\forall k \geq 1, J^k = n^{k-1}J$. On applique le binôme de Newton car I et J commutent :

$$\begin{aligned} (bJ + (a-b)I)^r &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} b^k J^k (a-b)^{r-k} \\ &= (a-b)^r I_n + \left(\sum_{k=1}^r \binom{r}{k} b^k n^{k-1} (a-b)^{r-k} \right) J \\ &= (a-b)^r I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (bn)^k (a-b)^{r-k} \right) J \\ &= (a-b)^r I_n + \frac{1}{n} ((bn + a - b)^r - (a-b)^r) J \end{aligned}$$