Droite réelle

1 Majorant/minorant

Définition 1. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

- On dit que E est majoré lorsqu'il existe un réel K vérifiant :$\forall x \in E, x \leqslant K$. On appelle K un majorant de E.
- On dit que E est minoré lorsqu'il existe un réel k vérifiant : $\forall x \in E, k \leqslant x$. On appelle k un minorant de E.
- On dit que E est borné s'il admet un minorant et un majorant.

Exemples 1.

1. *Donner un majorant et un minorant de* $\left\{\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}\right\}$.
2. *L'ensemble* $\left\{\frac{n^2+1}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\}$ *admet-il un majorant? minorant?*

Remarque. *Si E est un ensemble majoré, il admet une infinité de majorants. En effet, si K est un majorant de E, alors tout réel K' vérifiant $K' \geqslant K$ est également un majorant de E.*

Proposition 1.
Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est borné si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in E, |x| \leqslant K.$$

Définition 2.

- Soit E un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$, on appelle borne supérieure de E, noté $\sup(E)$ le plus petit de tous les majorants de E.
- Soit E un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$, on appelle borne inférieure de E, noté $\inf(E)$ le plus grand de tous les minorants de E.

Exemples 2.

1. *Borne sup/inf de* $]a, b]$, $]a, b[$
2. *borne sup/inf de* $\left\{\frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
3. *Borne sup/inf de* $\left\{\frac{n+1}{n-1}, n > 1\right\}$.

Théorème 2 (admis)**.**
Toute partie non-vide majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne sup (respectivement une borne inf).

Définition 3.

- Soit E un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$, on dit que E admet un maximum lorsque $\sup(E) \in E$. On note alors sa borne supérieure $\max(E)$.
- Soit E un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$, on dit que E admet un minimum lorsque $\inf(E) \in E$. On note alors sa borne inférieure $\min(E)$.

⚠ Lorsque l'on note $\sup(E)$ ou $\inf(E)$, cela ne signifie pas que la borne sup/inf n'appartient pas à E !

Exemple 3. *Les ensembles de l'exemple précédent admettent-ils des min/max?*

Théorème 3.
Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

Théorème 4.
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un maximum et un minimum.

Proposition 5.
Toute partie finie non vide admet un minimum et un maximum.

2 Partie entière

Définition 4. Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à x. Autrement dit $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N}, n \leqslant x\}$.

Exemples 4.

1. $\lfloor 1.3 \rfloor$=*1*
2. $\lfloor -1.1 \rfloor$=*-2*

Proposition 6.
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\lfloor x \rfloor$ est le seul entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Exemples 5.

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2. *Encadrer* $\lfloor x \rfloor$

Définition 5. Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans A si et seulement si tout intervalle non vide ouvert I de $\mathbb{R}$ intersecte A.

Théorème 7.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 8.
Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Exemple 6. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Définition 6. Un sous-ensemble A d'un ensemble B est dit dense dans B si tout élément de B est la limite d'une suite à valeurs dans A.