Calcul matriciel et systèmes linéaires

1 Systèmes linéaires

1.1 Définitions

On considère un système linéaire à n équations et p inconnues $x_1, \dots, x_p$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = & y_n \end{array}\right.$$

On dit que le système admet une solution s'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ tel que les n équations soient satisfaites.

Définition 1. On dit que le système est homogène si tous les y_i sont nuls. Un système homogène admet toujours une solution: la solution nulle.

Définition 2. Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble solution.
Un système est dit compatible si l'ensemble des solutions est non vide.

Définition 3. Il existe trois opérations dites "élémentaires" :

- Permuter deux lignes du système, on note $L_i \leftrightarrow L_j$
- Ajouter à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne, on note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.
- Multiplier une ligne par un scalaire **non nul**, on note $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

Proposition 1.
Modifier un système linéaire par une succession d'opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions.

Définition 4. On a dit qu'un système est échelonné ou triangulaire s'il est de la forme

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1+ & \ldots & & & & = b_1 \\ & a_{2j_2}x_{j_2} + \ldots & & & & = b_2 \\ & & \ddots & & & = \vdots \\ & & & a_{rj_r}x_{j_r} \ldots & & = b_r \\ & & & & 0 & = b_{r+1} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & = b_n \end{array}\right.$$

avec $1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Exemples 1.

1. $$\left\{\begin{array}{rl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 & =b_1 \\ -x_3+4x_4+2x_5 & =b_2 \\ 2x_4+2x_5 & =b_3 \\ 4x_4 & =b_4 \end{array}\right. \quad \textit{est échelonné}$$

2. $$\left\{\begin{array}{rl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 & =b_1 \\ -x_3+4x_4+2x_5 & =b_2 \\ 2x_4+2x_5 & =b_3 \\ 4x_4 & =b_4 \\ & =b_5 \end{array}\right. \quad \textit{est aussi échelonné}$$

3. $$\left\{\begin{array}{rl} x_1-x_2+3x_4+4x_5 & =b_1 \\ x_3-x_4 & =b_2 \\ 8x_5 & =b_3 \\ 0 & =b_4 \end{array}\right. \quad \textit{est échelonné.}$$

4. $$\left\{\begin{array}{ll} x_1-x_3+3x_5 & =b_1 \\ x_2+x_3 & =b_2 \\ -x_2 & =b_3 \\ x_3+x_5 & =b_4 \end{array}\right. \quad \textit{n'est pas échelonné.}$$

5. $$\left\{\begin{array}{rl} x_1+2x_2-x_3+x_5 & =b_1 \\ 4x_4+x_5 & =b_2 \\ 0 & =b_3 \\ 0 & =b_4 \end{array}\right. \quad \textit{est échelonné.}$$

Rigoureusement:

- Les coefficients $a_{11}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ sont non nuls.
- Les lignes dont le membre de gauche est nul sont en dernière position.
- Sur les lignes dont le membre de gauche n'est pas nul (c'est-à-dire celles qui ont des inconnues), les indices $j_1, \ldots, j_r$ des premiers coefficients non nuls sont strictement croissants.

Vocabulaire:

- On a dit que les premiers coefficients à gauche (non nuls) sont appelés pivots.
- Le nombre r de lignes dont le membre de gauche est non nul (cad celle qui ont des inconnues) est appelé rang du système.
- les x_k avec $k \neq j_i$ sont appelés variables libres: elles pourront prendre n'importe quelle valeur.
- Les dernières lignes, celles dont le membre de gauche est nul, sont appelées condition de compatibilité: elles donnent des conditions pour que le système admette des solutions (= soit compatible).
- Si $r = n = p$, on dit que le système est de Cramer.

Proposition 2.
Un système à p inconnues et n équations, de rang r vérifie $r \leqslant \min(n, p)$.

En effet, on a nécessairement $r \leqslant n$ (nombre de lignes non nulles est inférieur ou égal au nombre de lignes total) et $r \leqslant p$ car on perd au minimum une inconnue à chaque ligne donc on ne peut avoir $r > p$).

1.2 Système homogène

Proposition 3.
Soit S un système homogène. Alors :

- La somme de deux solutions de S est encore une solution de S.
- En multipliant une solution par un scalaire, on obtient une autre solution de S.

On dit que l'ensemble des solutions est stable par somme et par multiplication scalaire.

Proposition 4.
On considère un système homogène (donc les membres de droites sont nuls) à p inconnues et n équations, de rang r.

- Le système est toujours compatible, il admet toujours la solution nulle.
- Si $r = p$, le système admet une unique solution: la solution nulle.
- Si $r < p$, l'ensemble des solutions est paramétré par $p - r$ variables libres.

Remarque. *Le nombre d'équations importe peu: s'il y en a un trop grand nombre, il y aura des répétitions dans les équations et on les enlèvera.*

Exemples 2.

1. *On cherche à résoudre le système*

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 0 \\ 2x + 4y - 2z & = 0 \end{cases}$$

2. *On cherche à résoudre*

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x - 2y + z & = 0 \\ x + 4y - 3z & = 0 \end{cases}$$

1.3 Système quelconque

Proposition 5.
Soit S un système et S_0 le système homogène associé. Si X est une solution de S et X_0 une solution de S_0, alors $X + X_0$ est une solution de S.

On considère un système avec n équations, p inconnues et de rang r.

Théorème 6.

- Le système admet des solutions si (et seulement si) les conditions de compatibilité sont vérifiées.
- Si $r = n$, il n'y a pas de conditions de compatibilité, le système a donc toujours des solutions.
- Si $r < p$, il y a $p - r$ variables libres.
- Si $r = p$, il n'y a aucune variable libre. S'il y a une solution (= si les conditions de compatibilité sont vérifiées), elle est unique.
- Si $r = n = p$: il y a toujours une unique solution.

Exemples 3.

1. *On cherche à résoudre le système*

$$\begin{cases} x + 2y - z & = a \\ 2x + 4y - 2z & = b \end{cases}$$

2. *On considère le système :*

$$\begin{cases} x + 2y + z & = a \\ 2x - y + 2z & = b \\ x - 3y + z & = c \end{cases}$$

3. *On cherche à résoudre*

$$\begin{cases} x + 2y + z & = a \\ 2x - y + 2z & = b \\ x + 2y + 2z & = c \end{cases}$$

4. *On cherche à résoudre*

$$\begin{cases} x + 2y + z & = a \\ 2x - y + 2z & = b \\ x + 2y + 2z & = c \\ x - 3y & = d \end{cases}$$

1.4 Pivot de Gauss

Il existe un algorithme permettant la résolution d'un système linéaire : le pivot de Gauss. L'idée est de rendre le système triangulaire par des opérations élémentaires successives, puis de le résoudre par substitution. En pratique, il est rarement judicieux de l'appliquer car il rallonge souvent les calculs.

idée: On commence par placer un coefficient non nul à gauche sur la première ligne. Il va nous servir à enlever tous les coefficients de la première colonne pour les lignes d'indice supérieur à 2.

Concrètement, si les coefficients de la première colonne sont $a_{11}, \dots, a_{1n}$ alors on fait, pour $i > 1$, $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ (de l'intérêt d'avoir a_{11} non nul!).

On se retrouve avec des zéros en dessous de a_{11} sur la première colonne. On passe donc à la deuxième colonne:

- Si tous les coefficients sont nuls, on passe à la troisième.
- Sinon, quitte à permuter deux lignes, on s'assure que le coefficient d'indice $(2,2)$ soit non nul. Ce sera notre pivot qui va nous permettre d'éliminer tous les coefficients en dessous.

2 Notion de matrice et vocabulaire

2.1 Définitions

Définition 5. : Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice est un tableau rectangulaire formé de n lignes et de p colonnes de nombres. Sa taille est $n \times p$.

Remarque: On dit aussi "matrice $n \times p$" pour une matrice de taille $n \times p$. Il ne faut pas effectuer la multiplication.

Exemple 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Définition 6.

- Une matrice ligne ou encore vecteur ligne est une matrice formée d'une seule ligne.
- Une matrice colonne ou encore vecteur colonne est une matrice formée d'une seule colonne.
- Une matrice carrée de taille n est une matrice formée de n lignes et de n colonnes, $n \in \mathbb{N}^\star$.

Notations: On note $M_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples 5.

1. *Matrice ligne :* $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{1,6}(\mathbb{R})$.
2. *Matrice colonne :* $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in M_{6,1}(\mathbb{R})$.
3. *Matrices de taille 4 :* $M = \begin{pmatrix} 1,1 & 2,2 & 3,3 & 4,4 \\ 5,5 & 6,6 & 7,7 & 8,8 \\ 9,9 & 10,10 & 11,11 & 12,12 \\ 13,13 & 14,14 & 15,15 & 16,16 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

2.2 Écriture générale d'une matrice.

Une matrice de taille $n \times p$ avec $n, p \in \mathbb{N}^\star$ peut s'écrire sous la forme ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ s'appellent les coefficients de la matrice. On note alors $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Le coefficient a_{ij} est le coefficient placé à la $i$ème ligne et à la $j$ème colonne. On dit qu'il est le coefficient d'indice (i, j).

Exemples 6.

1. *Écrire* $A = (i + j) \in M_{23}(\mathbb{R})$,
2. *Écrire* $A = (i) \in M_{32}(\mathbb{R})$.

2.3 Égalité de deux matrices

Définition 7. On dira que deux matrices sont égales si elles sont de même taille et ont les mêmes coefficients aux mêmes places.

2.4 Matrices particulières

La matrice identité de taille n, notée I_n, est la matrice carrée de taille n contenant uniquement des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

Exemple 7. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit i, j deux entiers. On appelle symbole de Kronecker un réel δ_{ij} tel que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice identité peut alors s'écrire $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
La matrice nulle de taille n, notée 0_n, est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls, 0_{np} désigne la matrice nulle de taille $n \times p$. On la note aussi parfois (0).

Définition 8. Soit (n, p) deux entiers fixés. On appelle matrice élémentaire et on note E_{ij} la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1.

Remarque. *On ne précise pas la taille de la matrice E_{ij} pour éviter d'alourdir la notation, elle sera donnée par le contexte.*

3 Opérations sur les matrices

3.1 Addition et multiplication par un réel

Définition 9. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de même taille $n \times p$, leur somme $A + B$ est une matrice de même taille $n \times p$ définie par $A + B = (c_{ij})$ où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

⚠ On ne peut additionner que des matrices de même taille.

Proposition 7.
Soit A, B, C trois matrices de même taille.

- Commutativité : on a $A + B = B + A$.
- Associativité : on a $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Définition 10. Soit une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice λA est la matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$ définie par $\lambda A = (b_{ij})$ où $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

Remarque: Les règles de priorité sont les mêmes qu'avec les complexes:

- Pour tout complexe k, k', pour toute matrice A, $k(k'A) = (kk')A$ et $(k + k')A = kA + k'A$
- Pour tout complexe k, pour toutes matrices A et B de même taille: $k(A + B) = kA + kB$.

Définition 11. La matrice $(-1)A$, notée $-A$ est appelée la matrice opposée de la matrice A.

Remarque On peut définir la différence de deux matrices A et B de même taille : $A - B = A + (-1)B$.
On a $A - A = -A + A =$ la matrice nulle de même taille que A.

Proposition 8.

- Pour toute matrice $A \in M_{np}$, $A + 0_{np} = 0_{np} + A = A$, où 0_{np} désigne la matrice nulle de taille $n \times p$.
- Pour toute matrice $A \in M_{np}$, $0A = 0_{np}$.

Proposition 9.
Toute matrice M de $M_{np}(\mathbb{K})$ s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de matrices élémentaires. Plus précisément, si $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, alors

$$M = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} m_{ij} E_{ij}$$

Exemple 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

3.2 Multiplication de deux matrices

3.2.1 Définition

Définition 12. Soit n un entier naturel non nul. Soit $A = (a_{1j})$ une matrice ligne $1 \times n$ et $B = (b_{i1})$ une matrice colonne $n \times 1$. Alors $A \times B = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \ldots + a_{1n} \times b_{n1}$, c'est-à-dire le produit scalaire des vecteurs A et B.

Définition 13. Soit A une matrice de taille $n \times p$ et B une matrice de taille $p \times q$. Le produit $A \times B$ ou encore AB est la matrice de taille $n \times q$ dont le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est le produit de la ligne i de A et de la colonne j de B au sens de la définition donnée pour la multiplication d'une matrice ligne et d'une matrice colonne pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant q$

Le produit AB de deux matrices A et B n'existe pas si le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B.

Autrement dit, $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Exemples 9.

1. $A = (i+j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, $B = (ij)^{1 \leqslant i \leqslant p}_{1 \leqslant j \leqslant q}$, *calculer* AB.

2. $A = (i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *et* $B = \left(\frac{i}{j}\right)^{1 \leqslant i \leqslant p}_{1 \leqslant j \leqslant q}$,*calculer* AB.

Proposition 10.
Soit $(A, B, C) \in M_{np} \times M_{pq} \times M_{qr}$ alors $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$. On note ABC ce produit. C'est un élément de M_{nr}.

Propriétés (admises)
Soit A, A' deux matrice de taille $m \times n$, B et C des matrices de taille $n \times p$. Alors :

- Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + A') \times B = A \times B + A' \times B$.
- Produit par un réel : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(AB)$.
- Soit I_n la matrice identité de taille n et I_m la matrice identité de taille m. Alors $I_m \times A = A \times I_n = A$.
- Soit 0_{pm} la matrice nulle de taille $p \times m$ et 0_{np} la matrice nulle de taille $n \times p$, alors $0_{pm} \times A = 0_{pn}$ et $A \times 0_{np} = 0_{mp}$

Certaines propriétés très usuelles de la multiplication des nombres (réels ou complexes) ne s'étendent pas à la multiplication des matrices.

Exemples 10.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculer* AB *et* BA.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, *calculer* AB.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. *Montrer* $AB = AC$.

Remarque. 1. *Les produits* AB *et* BA, *lorqu'ils existent, ne sont, en général, pas égaux.*

2. *Si* $AB = AC$, *on ne peut pas "simplifier".*

Définition 14. Soit A et B deux matrices non nulles telles que le produit AB existe et soit égal à la matrice nulle. On dit alors que A et B sont des diviseurs de zéro.

3.2.2 Produit d'une matrice et d'un vecteur colonne

Proposition 11.
Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $X \in M_{p1}(\mathbb{K})$ un vecteur colonne. Alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Exemple 11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *et* $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$.

3.2.3 Produit avec une matrice élémentaire

Proposition 12.
Soit $E_{ij} \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $E_{kl} \in M_{pq}(\mathbb{K})$, alors

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} \in M_{nq}(\mathbb{K}) & \text{si } j = k \\ 0_{nq} & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

On rappelle que le symbole de Kronecker est défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Question: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, calculer AE_{23} et $E_{23}A$ où les matrices élémentaires sont carrées de taille 3.

Théorème 13.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors

- $AE_{ij} = B$ où B est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j-ème qui est égale à la i-ème colonne de A
- $E_{ij}A = C$ où C est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la i-ème ligne qui est égale à la j-ème ligne de A.

Proposition 14.
Les trois opérations élémentaires suivantes :

- Multiplier une ligne par un scalaire non nul
- Permuter deux lignes
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes

s'obtiennent donc en faisant un produit à gauche par une matrice bien choisie.

Remarque. *Et les mêmes opérations élémentaires sur les colonnes s'obtiennent en faisant un produit à droite !*

3.3 Transposée d'une matrice

Définition 15. Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in M_{np}(\mathbb{K})$, on appelle transposée et on note $M^\top$ la matrice de M_{pn} dont le coefficient d'indice (i,j) vaut m_{ji}. Autrement dit, les lignes de M correspondent aux colonnes de $M^\top$ et vice-versa.

Exemple: Calculer la transposée de $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

Proposition 15.

- Soit A, B deux matrices de même taille, alors pour tout scalaire λ, on a

$$(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$$

- Soit $A \in M_{np}$ et $B \in M_{pq}$, alors $(AB)^\top = B^\top A^\top$

Remarque. *On a $B^\top \in M_{qp}$ et $A^\top \in M_{pn}$ donc le produit $B^\top A^\top$ est bien défini.*

Remarque. $\left(M^\top\right)^\top = M$

Exemples 12.

1. *$X \in M_{n1}(\mathbb{R})$ et $Y \in M_{n1}(\mathbb{R})$, calculer $X^\top Y$ et $XY^\top$.*
2. *Soit D une matrice diagonale, que vaut $D^\top$?*

4 Matrices carrées

4.1 Trace d'une matrice carrée

Définition 16. Dans une matrice carrée de taille n , les coefficients $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forment la diagonale principale de la matrice.

Définition 17. Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de M et on note $\mathrm{Tr}(M)$ le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$. Il correspond à la somme des termes diagonaux.

Proposition 16.
Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Tr}(\lambda A + B) = \lambda\mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.

4.2 Matrices diagonales et triangulaires

Définition 18.

- Une matrice de taille n est dite diagonale si tous les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls c'est-à-dire $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.
- Une matrice de taille n est dite triangulaire supérieure si tous les coefficients en dessous de la diagonale sont nuls c'est-à-dire $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$.
- Une matrice de taille n est dite triangulaire inférieure si tous les coefficients au dessus de la diagonale sont nuls c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ si $\forall i < j$.
- Une matrice carrée est dite strictement triangulaire si elle est triangulaire et tous les éléments de sa diagonale sont nuls c'est-à-dire $a_{ij} = 0 \ \forall i \geqslant j$ OU $a_{ij} = 0, \forall i \leqslant j$.

Remarque: une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Proposition 17.
- *Le produit de deux matrices diagonales de même taille est une matrice diagonale de même taille obtenue en faisant le produit deux à deux des coefficients diagonaux.*
- *Le produit de deux matrices carrées triangulaires supérieures (respectivement inférieures) de même taille est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) de même taille. De plus, les termes diagonaux du produit sont obtenus en faisant le produit deux à deux des termes diagonaux.*

4.3 Matrices (anti)symétriques

Définition 19. On dit qu'une matrice carrée est symétrique si $A = A^\top$.
On dit qu'une matrice carrée est antisymétrique si $A = -A^\top$.

Une matrice antisymétrique a tous ses coefficients diagonaux nuls.

4.4 Puissances de matrices

Définition 20. Si A est une matrice carrée de taille n, on note $A^2 = A \times A$ et plus généralement $A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$ le produit des k matrices toutes égales à A. Pour $k = 0$, on note $A^k = I_n$.

Proposition 18.
Soit D une matrice diagonale de taille n d'éléments diagonaux $d_{11}d_{22}, \ldots, d_{nn}$. Pour tout entier $p \geqslant 1$, la matrice D^p est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $d_{11}^p, d_{22}^p, \ldots, d_{nn}^p$.

Proposition 19.
- Les puissances d'une matrice triangulaire sont triangulaires de même forme.
- Les puissances d'une matrice strictement triangulaire de taille n sont nulles à partir de l'exposant n.

Définition 21. Une matrice dont une puissance est nulle est appelée une matrice nilpotente.

Remarque. *À chaque puissance successive d'une matrice triangulaire stricte, la diagonale de* 0 *progresse.*

Définition 22. Soit $P(X) = \alpha_k X^k + \alpha_{k-1} X^{k-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$, on appelle $P(A)$ la matrice

$$P(A) = \alpha_k A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n.$$

Exemple 13. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P(X) = X^2 + 1$, *calculer* $P(A)$, $P(I_2)$ *et* $P(0_3)$ *où* 0_3 *désigne la matrice nulle de taille 3.*

4.5 Binôme de Newton

Proposition 20 (binôme de Newton)**.** Soit A et B deux matrices de même taille telles que $AB = BA$, alors pour tout entier m :

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

⚠ Il est impératif que A et B commutent, il faut donc préciser que c'est le cas avant d'appliquer Newton.

Exemple:

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Écrire M sous la forme $D+T$, où D est une matrice diagonale et T une matrice strictement triangulaire supérieure.
2. Calculer T^2, et exprimer M^2 en fonction de T.
3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $M^m = 2^m I_3 + m \times 2^{m-1} \times T$.

Remarque. *Un multiple de l'identité commute avec toutes les matrices. Une matrice* A *commute avec toute matrice de la forme* $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k A^k$.

4.6 Matrices inversibles

Définition 23. Soit A une matrice carrée de taille n, $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée B de taille n, telle que $A \times B = B \times A = I_n$. La matrice B est alors unique, on la note A^{-1} et elle est appelée la matrice inverse de A.

Remarque. *On ne peut parler de la matrice* A^{-1} *que si l'on sait que* A *est inversible.*

On note $GL_n(\mathbb{K})$ est on appelle groupe linéaire de taille n l'ensemble des matrices inversibles de taille n.

Proposition 21.

- I_n est inversible, d'inverse elle-même.
- Si A est inversible, alors A^{-1} est aussi inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

Remarque. *Nous verrons plus tard dans l'année qu'en réalité, il suffit d'avoir $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ pour affirmer que A est inversible d'inverse B.*

Proposition 22.

- Une matrice diagonale D est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Son inverse est alors la matrice diagonale dont les coefficients sont les inverses de ceux de D.
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Propriété

Soit A une matrice carrée de taille 2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Le réel $ad - bc$ est appelé déterminant de la matrice A, noté $\det(A)$. Si $ad - bc \neq 0$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

4.7 Système et matrice

Proposition 23.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si le système associé $AX = Y$ admet une unique solution.

Définition 24. Si A est inversible, le système linéaire est alors appelé système de Cramer.

Remarque. *Lorsque l'on a un système de Cramer, l'unique solution est donnée par $X = A^{-1} \times Y$. En résolvant le système, on détermine donc la matrice inverse.*

Méthode : Comment déterminer l'inverse d'une matrice.

1. Résoudre $AX = Y$.
2. On travaille sur la matrice $2n \times n$: $(A|I_n)$. Par opérations élémentaires, on cherche à avoir I_n sur la gauche, on a alors $(I_n|A^{-1})$.

5 Déterminant

5.1 définition

Le déterminant d'une matrice carrée sera défini plus tard dans l'année. Pour l'instant, nous allons juste admettre que c'est un scalaire (donc un réel si la matrice est à coefficients réels, un complexe si la matrice est à coefficients complexes) qui permet de savoir si une matrice est inversible. Précisément, on a

> **Proposition 24.**
> Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Notations : Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\det(A)$ son déterminant. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, alors on note $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

5.2 Propriétés

On admet ces propriétés du déterminant. Nous les montrerons plus tard quand nous définirons correctement le déterminant.

> **Proposition 25.**
> Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \ldots, C_n$ ses colonnes. S'il existe $j \in [\![1, n]\!]$ et des scalaires λ_i tels que
> $$C_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i C_i,$$
> alors $\det(A) = 0$.

Exemple 14. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =?$

> **Proposition 26.**
> Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
>
> - Le déterminant de A est multiplié par -1 si l'on permute deux colonnes de A.
> - Le déterminant est multiplié par λ si on multiplie une colonne par λ.
> - Le déterminant ne change pas si on ajoute à une colonne de A une CL des autres colonnes.

Exemples 15.

1. $\det(2I_3) =?$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & & \\ 0 & 1 & 11 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Proposition 27.
Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$, alors

- $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$ (A et B sont des matrices carrées)
- $det(I_n) = 1$
- $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
- Si A est inversible alors $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

Théorème 28.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $det(A^T) = det(A)$.

La conséquence est que l'on sait comment les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice modifie son déterminant! On peut donc alterner les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Exemple 16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

5.3 Calcul pratique en dimension 2 et 3

En dimension 2 on a:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

En dimension 3 on peut utiliser la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - hfa - dbi$$

Remarque Pour une matrice de taille n, il y a $n!$ calculs à faire. N'espérez pas généraliser la règle de Sarrus.

Exemple 17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

5.4 Matrice triangulaire

Proposition 29.
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.

Remarque. *C'est donc aussi le cas d'une matrice diagonale !*

En pratique, on peut faire des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes pour se ramener à une matrice triangulaire.

Exemple 18. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

5.5 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

On fixe $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$.

Notation: Pour $i, j \in [\![1; n]\!]$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice A privée de sa i-ième ligne et de sa j-ième colonne.

Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$. On a : $\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ $\qquad \Delta_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

Théorème 30.

1. *Soit* $i \in [\![1; n]\!]$. *On a* $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$
   (développement par rapport à la i-ième ligne)

2. *Soit* $j \in [\![1; n]\!]$. *On a* $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$
   (développement par rapport à la j-ième colonne)

Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Développez par rapport

- à la première ligne
- à la deuxième ligne
- à la première colonne

Conseil: pour le $(-1)^{i+j}$, retenir le damier des $(+1)$, (-1) :

$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

diagonale de $\oplus$

5.6 Vandermonde

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle matrice de Vandermonde la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

de taille $n \times n$ et on note $V(x_1, \dots, x_n)$ son déterminant, appelé déterminant de Vandermonde.

Proposition 31.
Pour tout $(x_1, \dots, x_n)$, on a $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant j} (x_j - x_i)$. La matrice de Vandermonde est donc inversible si et seulement si les x_i sont distincts.