Suites numériques

1 Suites réelles ou complexes

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Généralités

Définition 1. Une suite numérique est une application d'une partie A de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{K}$.
On la note $u : n \in A \longmapsto u(n) = u_n$.
On parlera de la suite u, ou de la suite (u_n) ou encore de la suite $(u_n)_{n \in A}$.
Généralement, $A = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^\star$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie :

- directement : on donne l'expression de u_n en fonction de n

  Exemples 1.
  1. *suite (u_n) définie par :* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$
  2. *suite (u_n) définie par :* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3+n}{1+n^2}$.

- par la donnée des premiers termes et d'une relation de récurrence.

  Exemples 2.
  1. *suite arithmétique :* $u_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r,\ \ r \in \mathbb{C}$.
  2. *suite géométrique :* $u_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q.u_n,\ \ q \in \mathbb{C}$.
  3. *suite arithmético-géométrique (u_n) telle que* $u_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a.u_n + b,$ $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.
  4. *suite (u_n) telle que* $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n,\ \ (a,b) \in \mathbb{C}^2$
  5. *suite (u_n) telle que* $u_0 = a \in \mathbb{R}$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = e^{u_n}$
  6. *suite (u_n) telle que* $\forall n \in \mathbb{N} u_n + e^{u_n} = \dfrac{1}{n+1}$

1.2 Propriétés

Définition 2.
- Une suite (u_n) est constante si : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.
- Elle est stationnaire s'il existe n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est périodique de période p lorsque : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.

- Une suite réelle (u_n) est majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M \qquad (\text{ resp. } u_n \geqslant M\ )$.
- Une suite (u_n) est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.
- Une suite réelle (u_n) est croissante (resp. décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n \quad (\text{ resp. } u_{n+1} \leqslant u_n\ )$.
- Une suite réelle (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

2 Comparaison des suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

Définition 3. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), ce que l'on note : $u_n = o\,(v_n)$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\quad \text{tel que : } n \geqslant p \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|$$

Cela revient à dire (si $v_n \neq 0$) que :

$$u_n = o(v_n) \ \text{ si } \frac{u_n}{v_n} \to 0.$$

Remarque. *On a $u_n = o\,(1)$ si la suite (u_n) converge vers 0.*

Notations: On note $u_n = v_n + o(w_n)$ si $u_n - v_n = o(w_n)$.

> **Proposition 1.**
> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alors
> $$u_n \to a \Leftrightarrow u_n = a + o(1).$$

Définition 4. On dit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si :
$u_n = v_n + o\,(v_n)$, ce qui revient à dire que $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1.

On note : $u_n \sim v_n$

Remarque. *Ainsi, si (u_n) converge vers l et si $u_n \sim v_n$, alors, (v_n) converge aussi vers l.*

⚠ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite, elles ne sont pas forcément équivalentes.

> **Proposition 2.**
> Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to l$, avec $l \neq 0$, alors $u_n \sim l$.

> **Proposition 3.**
> Si $u_n \sim v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

> **Proposition 4.**
> Soit $(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$, alors
>
> - Si $a > 1$, $n^\alpha = o\,(a^n)$
> - $a^n = o\,(n!)$
> - $n! = o\,(n^n)$

On peut, bien sûr, utiliser aussi des DL avec des suites.

Exemple 3. *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$

3 Convergence des suites réelles

Dans tout ce paragraphe, on considère des suites réelles

3.0.1 Definition

Définition 5. On dit que la suite (u_n) converge vers le réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient les u_n, pour tout indice n, sauf pour un nombre fini d'entre eux. Autrement dit, pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N, u_n \in I$. On peut aussi le formuler en explicitant l'intervalle :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, |\, u_n - l \,| < \varepsilon.$$

Définition 6. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, u_n > A.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, u_n < -A.$$

Proposition 5.
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, alors sa limite l est unique.

Définition 7. On dit que la suite (u_n) diverge si elle ne converge pas.

Remarque. *Autrement dit, la suite diverge si elle n'admet pas de limite OU si elle admet une limite infinie.*

Proposition 6.
Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse !!

Exemple 4. *La suite* $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est bornée mais non convergente. Savez-vous le montrer?*

3.0.2 Propriétés des limites

Proposition 7.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent vers l et l'. Alors :

- la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$,
- la suite $(u_n v_n)$ converge vers ll'
- la suite $(\,|\,u_n\,|\,)$ converge vers $|\,l\,|$.
- Si, $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0 et $l' \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.
- Si f est une fonction continue, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$.

Remarque. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$. La réciproque est, bien entendu, fausse SAUF un cas particulier. lequel?*

Proposition 8.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers l et l'.
Si à partir d'un certain rang n_0, on a $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$, alors $l \leqslant l'$.

Remarque. *Si on a $\forall n \geqslant n_0$, $u_n < v_n$, alors $l \leqslant l'$ (pas d'inégalité stricte !). Penser à $u_n = \dfrac{1}{n} > 0$ qui converge vers 0.*

Proposition 9.
Soit (u_n) une suite convergente de limite un réel l et $A < l$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n > A.$$

3.0.3 Théorème de convergence

Théorème 10 (théorème d'encadrement ou des gendarmes)**.** *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. On suppose que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l.*
Alors, (v_n) converge aussi vers l.

Remarque. *Le théorème donne l'existence de la limite ET sa valeur.*

Exemples 5.

1. $\left(\dfrac{1}{n^2}\lfloor \ln(n) \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. $\left(\dfrac{(-1)^n + n^2}{n^2 + n + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 11.
Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 et (v_n) une suite bornée. Alors, la suite $(u_n.v_n)$ converge vers 0

Exemples 6.

1. $\left(\dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. $\left((-1)^n \sin\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Théorème 12 (théorème de minoration)**.** *Soit (u_n) et (v_n) des suites telles que, à partir d'un certain rang,*

$$u_n \leqslant v_n,$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Alors (v_n) tend vers $+\infty$.

Remarque. *On a également le théorème de majoration lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.*

Exemples 7.

1. *Limite de* $(\lfloor e^n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$
2. *Limite de* $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$

Théorème 13 (Théorème de la limite monotone)**.** Toute suite (u_n) monotone admet une limite.
En particulier :

- Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge.
- Toute suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque. *Pour montrer ce théorème, on montre qu'une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) converge vers la borne supérieure (resp. borne inférieure) de l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ mais en pratique, déterminer la borne supérieure de cet ensemble est compliqué donc on retient que ce théorème donne l'existence de la limite mais pas sa valeur. Pour trouver la valeur de la limite, quand c'est possible, il faut utiliser l'unicité de la limite.*

Exemples 8.

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3(u_n - 1)^2$.
2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3(u_n - 1)^2$.
3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + (u_n - 1)^2$.
4. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $e^{u_n} + u_n = n$.

3.0.4 Caractérisation séquentielle

Proposition 14.
Soit A un ensemble non vide majoré (respectivement minoré) de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$ (respectivement $\inf(A)$).

Remarque. *On avait déjà montré le fait qu'un majorant qui est limite d'une suite d'éléments de A était le sup, là on montre la réciproque.*

Proposition 15.
Un ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Remarque: Tout réel est donc limite d'une suite de rationnels.

3.1 Suites extraites

Définition 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemples 9.

1. $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $(u_{n^2+3n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 16.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. *Ce résultat est très utile en contraposée: si on trouve deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ont des limites différentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Exemples 10.

1. *Montrer que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
2. *Que dire de $\left(\cos \frac{n\pi}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$?*

⚠ La réciproque est fausse mais la convergence de suites extraites peut parfois permettre de conclure:

Proposition 17.
Si $v = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = \left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

- v et w convergent vers la même limite l et
- $\{\varphi(n), n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi(n), n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.

Exemples 11.

1. *Si* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite, on peut affirmer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

2. *Que dire si* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite?*

3.2 Suites adjacentes

Définition 9. Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque. *Si deux suites sont adjacentes, alors pour tout* n, $u_n \leqslant v_n$.

Théorème 18.
Deux suites adjacentes convergent et leurs limites sont égales.

Remarque. *Si deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes avec les notations de la définition, alors elles convergent vers la même limite* l *et on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$.

Exemples 12.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$, *on pose* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ *et* $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *sont adjacentes. En déduire l'existence d'un réel* γ *tel que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(\ln(n))$.

2. *Que peut-on dire de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont adjacentes?*

3.3 Suites complexes

Définition 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexes, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe l si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| < \epsilon.$$

Comme pour le cas réel, on montre que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, celle-ci est unique.

Proposition 19.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, elle converge si et seulement si les suites $(\mathcal{R}eu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathcal{I}mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Remarque. *Comme il n'y a pas d'ordre sur* $\mathbb{C}$, *on n'a ni le thm de convergence monotone, ni celui des gendarmes, ni celui des suites adjacentes. Il vaut donc mieux se ramener à l'étude de suites réelles en considérant sa partie réelle et sa partie imaginaire.*

4 Étude de suites particulières

4.1 Cas des suites arithmético-géométriques

Définition 11. La suite u, de terme général u_n, est une suite arithmético-géométrique s'il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \alpha . u_n + \beta$$

Théorème 20.
Soit u une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$ avec $\alpha \neq 1$. Soit c l'unique solution de $x = \alpha x + \beta$. Alors $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison α.

Exemple 13. *Déterminer l'expression du terme général de la suite définie par* $u_0 = 2$ *et*
? $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$.

4.2 Récurrences linéaires d'ordre 2

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 12. La suite u, de terme général u_n, est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^\star$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \alpha . u_{n+1} + \beta u_n$

Définition 13. On définit l'équation caractéristique de la récurrence linéaire par $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ (E_C)

Théorème 21 (expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)**.** *Soient* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\star}$ *non tous deux nuls et* $\mathcal{L}_2(\mathbb{K}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha.u_{n+1} + \beta u_n\right\}$. *Alors:*

1. *Si* (E_c) *possède deux solutions réelles distinctes* x_1 *et* x_2, *alors* $((x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ *est une base de* $\mathcal{L}_2(\mathbb{K})$*;*
   Autrement dit, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{K})$, *alors il existe* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *unique tel que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Les scalaires* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *sont déterminés par la donnée des premiers termes de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(*u_0 *et* u_1 *ou* u_1 *et* u_2*).*

2. *Si* (E_c) *possède une unique solution* x_0, *alors* $((x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nx_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ *est une base de* $\mathcal{L}_2(\mathbb{K})$*; Autrement dit, si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{K})$, *alors il existe* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *unique tel que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(x_0^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(nx_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Les scalaires* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *sont déterminés par la donnée des premiers termes de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(*u_0, u_1 *ou* u_1, u_2*).*

3. *Si l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées,* $z_1 = \rho e^{i\theta}$ *et* $z_2 = \rho e^{-i\theta}$, *alors,*$\{(z_1^n), (z_2^n)\}$ *est une base de* $\mathcal{L}_2(\mathbb{C})$ *et* $((\rho^n \cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}, (\rho^n \sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}})$ *est une base de* $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. *Autrement dit:*
   - *si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{C})$, *il existe* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ *unique tel que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - *si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, *il existe* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *unique tel que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}} + \mu(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

   Tout élément de $\mathcal{L}_2(\mathbb{K})$ *s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire d'une base et les coefficients de la combinaison linéaire sont déterminés par les premiers termes de la suite.*

Exemples 14.

1. *Déterminer le terme général de la suite définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
2. *Déterminer le terme général de la suite définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
3. *Déterminer le terme général de la suite définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

4.3 Étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue

Définition 14. Soit f une fonction. On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 \in I$ et une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur I et I est stable par f.

Remarque. *Le fait que* $f(I) \subset I$ *assure l'existence de* u_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exemples 15.

1. $u_0 \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

2. $u_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

3. $u_0 \geq 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

Proposition 22.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est un point fixe de f c'est-à-dire un réel l qui vérifie $f(l) = l$.

Remarque. *Cela découle de la continuité de f et de l'unicité de la limite.*

Exemple 16. *Soit $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.*

Remarque. *Pour déterminer les points fixes de f, on cherche les points d'annulation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.*

Proposition 23.
Soit I un intervalle stable par f. Si f est croissante sur I et $u_0 \in I$ alors

- la suite (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.
- si l est un point fixe de f et $u_0 \leqslant l$ (resp. $u_0 \geqslant l$) alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant l$ (resp. $u_n \geqslant l$). Autrement dit, la suite reste du même côté d'un point fixe.

Les deux propositions précédentes sont à redémontrer rapidement lorsque vous les utilisez.

Remarques. *1. Le signe de $u_1 - u_0$ s'obtient en étudiant celui de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.*

2. Si I est un intervalle borné et que f est croissante, le théorème de limite monotone assure la convergence.

Exemples 17.
1. *Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ avec $u_0 \geqslant 1$.*

Si f est décroissante, l'étude est beaucoup plus compliquée! On se ramène au cas précédent en remarquant que $f \circ f$ est croissante.

Plus précisément, si f est décroissante sur un intervalle stable I et $u_0 \in I$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$ et $h = f \circ f$. On a alors $v_{n+1} = h(v_n)$ avec h croissante.

- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f, alors, comme $f(v_n) = u_{2n+1}$, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de h qui n'est pas un point fixe de f, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exemples 18.
1. *Étudier la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$ et $u_0 > 0$.*
2. *Étudier la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$.*