

## Correction du TD n 10

**Correction 1** On fait  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$  et  $L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_1$ , on obtient

$$\begin{cases} x + 2y + t &= a \\ y - z + t &= b \\ 0 &= c - a \\ 0 &= d - a - b \end{cases}$$

On en déduit que le rang du système est 2.

**Correction 2** • Si  $a = 1$  le rang vaut 1 car toutes les lignes du système sont identiques. Si  $a \neq 1$ , le rang vaut 2 car  $L_1 = L_3$  (et  $L_1$  et  $L_2$  non colinéaires).

- Si  $a = 1$  le rang vaut 1 car toutes les lignes du système sont identiques.  
Si  $a = -2$ , on a  $L_1 + L_2 + L_3 = 0$ , et  $L_1$  et  $L_2$  non colinéaires donc le rang vaut 2.  
Si  $a \notin \{-2, 1\}$ , on triangularise le système et on constate que le rang vaut 3.

- On fait  $L_3 \leftrightarrow L_1$ ,  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_2$ , on obtient

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & z \\ 0 & 1-a & a-a^2 & y-z \\ 0 & a-a^2 & 1-a^3 & x-a^2 y \end{array} \right)$$

On fait ensuite  $L_3 \leftarrow L_3 - aL_2$ , on obtient

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & z \\ 0 & 1-a & a-a^2 & y-z \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x-a^2 y - ay + az \end{array} \right)$$

On en déduit que si  $a = -1$  le rang vaut 2, si  $a = 1$ , le rang vaut 1, sinon le rang vaut 3.

**Correction 3** L'ensemble des solutions du premier système est  $\{(3-z, 2-2z, z), z \in \mathbb{R}\}$ .

Le deuxième système a une unique solution  $\left(\frac{c+4a+3b}{10}, \frac{-2a+b+7c}{20}, \frac{-a-2b+c}{5}\right)$ .

Le troisième système a une unique solution  $(1, -1, 2)$ .

**Correction 4** • La condition de compatibilité est  $9b_2 - 5b_1 + 2b_4 - 6b_3 = 0$ . Si elle est vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\left\{ \left( -\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2} + \frac{3b_4}{2} - y, y, -\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, \frac{b_1 - b_2}{2} \right), y \in \mathbb{R} \right\}$$

- La condition de compatibilité est  $a + 3b - c = 0$ . Si elle est vérifiée, les solutions sont

$$\left\{ \left( \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} - \frac{1}{3}z, \frac{a}{3} - \frac{b}{3} + \frac{2}{3}z - t, z, t \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

**Correction 5** On montre facilement que  $x_1 = \lambda^n x_1$  donc

- Soit  $\lambda^n \neq 1$  donc  $x_1 = 0$  et dans ce cas  $x_i = 0, \forall i$  donc la seule solution est la solution nulle.
- Soit  $\lambda^n = 1$  et dans ce cas les solutions sont les  $n$ -uplets de la forme  $x(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}), x_1 \in \mathbb{R}$ .

**Correction 6** On fait  $L_1 \leftarrow L_1 \sum_{i=2}^n (-\lambda)^{i-1} L_i$ , on obtient:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \Delta \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} + \lambda \end{pmatrix}$$

avec  $\Delta = -a_0 + a_1 \lambda - a_2 \lambda^2 + \dots + (-1)^{n-2} \lambda^{n-1} a_{n-1} + (-1)^{n-1} \lambda^n = -\left( (-\lambda)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda)^i a_n \right)$ . On permute ensuite  $L_n$  et  $L_1$  et on obtient un système triangulaire dont les coefficients diagonaux valent 1 sauf le dernier qui vaut  $-\left( (-\lambda)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda)^i a_n \right)$ . On a donc des solutions non-nulles si  $-\lambda$  est racine du polynôme  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$ . Si c'est le cas, la dernière variable est libre et elle paramètre les solutions.

**Correction 7** On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a aussi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc, sans aucun calcul,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est la deuxième méthode la plus judicieuse.

**Correction 8** On a  $S = 5AB - 3BA - 5B^2$  et  $T = A^2 - B^2 - 3AB - BA + 2BA^2 - 2A^2B$

**Correction 9** On suppose  $AB = BA$ , on a alors  $A^{-1}AB = A^{-1}BA$  puis  $B = A^{-1}BA$  car  $A^{-1}A = I$ . Enfin, on obtient  $BA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$  donc  $BA^{-1} = A^{-1}B$  et  $A^{-1}$  commute avec  $B$ .

**Correction 10** On pose  $B^2 = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . On a  $b_{ij} = i$ , d'après la formule du produit matriciel, on a donc, pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}b_{kj} =$

$$\sum_{k=1}^n ik = \frac{n(n+1)}{2}i.$$

On en déduit que  $B^2 = \frac{n(n+1)}{2}B$ .

**Correction 11** On pose  $A^2 = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . On a  $a_{ij} = \frac{i}{j}$ , d'après la formule du produit matriciel, on a donc, pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} =$

$$\sum_{k=1}^n \frac{i}{k} \frac{k}{j} = n \frac{i}{j}.$$

On en déduit que  $A^2 = nA$ .

**Correction 12** Notons  $A = (a_{ij})$ ,  ${}^tA = (b_{ij})$  et  ${}^tAA = (c_{ij})$ . On sait que, pour tout entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}.$$

Or,  $b_{ik} = a_{ki}$ , par définition de la transposée. On a donc :

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2,$$

d'où :

$$\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2.$$

On a supposé  $\text{Tr}({}^tAA) = 0$ . Comme c'est une somme nulle de réels positifs, cela implique qu'ils sont tous nuls. On a donc :

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ki} = 0,$$

ce qui montre que la matrice est nulle.

**Correction 13** non car la somme des deux premières lignes est égale à la troisième ligne, on en déduit que le déterminant est nul donc la matrice n'est pas inversible.

**Correction 14**  $A$  n'est pas inversible car  $C_2 - C_1 = C_3$  donc son déterminant est nul.

On a

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ en faisant } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la deuxième ligne} \\ &= 3 \neq 0 \end{aligned}$$

la matrice  $B$  est donc inversible.

On a

$$\begin{aligned} \det(C) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ en faisant } L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ &= 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -21 \neq 0 \end{aligned}$$

La matrice est donc inversible.

On remarque que la dernière colonne de  $D$  est égale à deux fois la première colonne, on en déduit que  $D$  n'est pas inversible.

**Correction 15** Le système associé est :

$$\begin{cases} x_2 = b_1 \\ x_3 = b_2 \\ \vdots \\ x_1 = b_n \end{cases}$$

Il est clair qu'il possède une unique solution  $(b_n, b_1, \dots, b_{n-1})$  donc la matrice associée est inversible.

**Correction 16** Le système associé à la matrice est :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + z = b_1 \\ x + y = b_2 \\ x - y + z = b_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + z = b_1 \\ x + y = b_2 \\ y = b_1 - b_3 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = b_1 - b_3 \\ x = -b_1 + b_2 + b_3 \\ z = 2b_1 - b_2 - b_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -b_1 + b_2 + b_3 \\ y = b_1 - b_3 \\ z = 2b_1 - b_2 - b_3. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Correction 17** Le système associé est :

$$\begin{cases} x_2 = b_1 \\ x_3 = b_2 \\ \vdots \\ x_1 = b_n, \end{cases}$$

et son unique solution est :

$$(x_1, \dots, x_n) = (b_n, b_1, \dots, b_{n-1})$$

On en déduit que l'inverse de la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Correction 18** On écrit

$$A(A + 2I_n) = I_n,$$

on peut alors affirmer que  $A$  est inversible et que son inverse est  $A + 2I_n$ .

**Correction 19** On a  $J^2 = nJ$  puis, par récurrence, pour tout  $r \geq 1$ ,  $J^r = n^{r-1}J$  (et  $J^0 = I_n$ ).

**Correction 20** On écrit  $M = 2I_3 + N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On sait que  $I_3$  commute avec toutes les matrices, en particulier avec  $N$  donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$M^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} N^k (2I_3)^{r-k} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} 2^{r-k} N^k.$$

Or,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N^3 = (0)$$

donc la somme se réduit à :

$$M^r = \sum_{k=0}^2 \binom{r}{k} 2^{r-k} N^k = 2^r I_3 + 2^{r-1} r N + 2^{r-2} \frac{r(r-1)}{2} N^2,$$

soit encore :

$$M^r = 2^r I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2^{r-1} r & -2^{r-1} r \\ 0 & 0 & 2^{r-1} r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{r-3} r(r-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$M^r = \begin{pmatrix} 2^r & 2^{r-1}r & 2^{r-3}r(r-5) \\ 0 & 2^r & 2^{r-1}r \\ 0 & 0 & 2^r \end{pmatrix}.$$

**Correction 21** 1.  $A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $(A + I_3)^3 = 0_3$ .

2. On peut appliquer le binôme de Newton puisque  $(A + I_3)$  et  $-I_3$  commutent. On a

$$\begin{aligned} A^n &= ((A + I_3) + (-I_3))^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (A + I_3)^k (-I_3)^{n-k} \\ &= (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1} (A + I_3) + \frac{n(n-1)}{2} (-1)^{n-2} (A + I_3)^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n(-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & n(-1)^{n-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Correction 22**

$$A^2 = (0) \text{ donc } A^n = (0), \forall n \geq 2$$

$$B^2 = 3B \text{ donc } B^n = 3^{n-1}B, \forall n \geq 1.$$

$$C^2 = 2C \text{ donc } C^n = 2^{n-1}C, \forall n \geq 1.$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } D^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$E^3 = (0) \text{ donc } E^n = (0) \forall n \geq 3$$

Enfin, on a

$$F^4 = -F \text{ donc } F^5 = -F^2, F^6 = -F^3 \text{ puis } F^7 = F.$$

Si on prend  $n = 3p + q$  avec  $q \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , on a  $F^n = (-1)^p F^q$ .

**Correction 23** On triangularise le système en faisant  $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$  et  $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$ . On constate que le rang vaut 4.

**Correction 24** Le rang du premier est équivalent à celui obtenu en faisant  $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$  pour  $i = 2..n$  qui ressemble à ça :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ qui est aussi équivalent à } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (L_i \leftarrow L_2, i = 3..n)$$

Le rang est donc 2.

Pour le deuxième système, on obtient un système équivalent en faisant  $L_n \leftrightarrow L_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & & a & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait ensuite  $L_i \leftarrow L_i - L_1, \forall i = 2..n-1$  et  $L_n \leftarrow L_n - aL_1$  ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & \dots & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Enfin, on fait  $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=2}^{n-1} L_i$  et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m \end{pmatrix}$$

avec  $m = (1-a)(n-1+a)$ . On a donc trois cas possibles:

- $a \neq 1$  et  $a \neq 1-n$  et le système est de rang  $n$ .
- $a = 1-n$  et le système est de rang  $n-1$ .
- $a = 1$  et le système est de rang 1.

**Correction 25** ( $S_1$ ) : On a une solution unique pour tout  $b_1, b_2, b_3, b_4$ , c'est

$$\left( \frac{b_1}{4}, \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2}, \frac{3b_4}{2}, \frac{5b_1}{4} - \frac{9b_2}{4} + \frac{3b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, -\frac{3b_1}{2} + \frac{5b_2}{2} - b_3, \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2} \right)$$

( $S_2$ ) : On a des solutions si  $b_2 = b_1 + b_3$ . L'ensemble des solutions est

$$\{(-2b_1 + 3b_4 - 11z, b_3 - 2z, b_1 - b_4 - b_3, z), z \in \mathbb{R}\}$$

( $S_3$ ) : On a des solutions si  $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$  et  $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$ . L'ensemble des solutions est

$$\{(b_1 - 2b_4 + 3y + t, y, b_4 - 2y, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

( $S_4$ ) : On a des solutions si  $b_2 = -2b_1$  et  $b_3 = -b_1$  et  $b_4 = 3b_1$ . L'ensemble est alors

$$\{(b_1 - 2y - z - 2t, y, z, t), (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}$$

**Correction 26** L'unique solution de  $T_1$  est  $(-3, -2, -1/2)$ , les solutions de  $T_2$  sont  $\{(1, 2 - 2t, t), t \in \mathbb{R}\}$ .

**Correction 27** 1. Il a comme unique solution  $(1, 2, 3)$ .

2. Il n'y a aucune solution.

3. Les solutions sont  $\{(3 + 2y - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Ici,  $y$  et  $z$  sont variables libres.

4. On remarque que  $L_1 + b_2 = L_4$  et  $L_3 - L_1 = -L_2$  donc le système est équivalent aux deux premières lignes, les solutions sont

$$\left\{ \left( 1 + \frac{z}{2} - \frac{t}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{t}{2}, z, t \right), (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ici,  $z$  et  $t$  sont variables libres.

5. On remarque que  $L_1 + L_2 = 2L_3$ , les solutions sont  $\{(3 - z, 2 - 2z, z), z \in \mathbb{R}\}$ , ici  $z$  est variable libre.

**Correction 28** On utilise la formule du produit matriciel. Le coefficient  $(AB)_{ij}$  d'indice  $(i, j)$  du produit  $AB$  est égal à :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{kj},$$

car  $A$  est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On calcule maintenant le coefficient d'indice  $(i, j)$  du produit matriciel  $ABA$ :

$$\sum_{l=1}^n (AB)_{il} a_{lj} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kl}.$$

On a montré que tous les coefficients du produit matriciel  $ABA$  sont identiques, égaux à la somme de tous les coefficients de  $B$ . Si on note  $s$  la somme de tous les coefficients de  $B$ , on a donc :

$$ABA = sA$$

puis

$$\text{Tr}(ABA) = s\text{Tr}(A) = ns.$$

**Correction 29** On écrit :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On fait  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

puis  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

On a désormais une matrice triangulaire supérieure. On va maintenant "éliminer" les coefficients au-dessus de la diagonale. Pour cela, on fait  $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right),$$

puis  $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 + L_3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

La matrice diagonale obtenue est égale à l'identité, on n'a donc pas besoin de diviser chaque ligne par la valeur du coefficient diagonal. On retrouve que l'inverse de la matrice donnée est :

$$\left( \begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

**Correction 30** 1. On résout le système linéaire associé, on trouve que  $A$  est in-

versible et  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

2. On a  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$  On a donc  $A^2 - A = 2I_3$  donc  $A(A - I_3) = 2I_3$ .

On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$  ce qui est le résultat trouvé à la question précédente.

**Correction 31** On sait déjà que les coefficients diagonaux seront élevés à la puissance calculée et que toute puissance de  $M$  sera triangulaire supérieure. On calcule les premières puissances. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

et :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 26 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls sauf le coefficient en haut à gauche qui a été obtenu ainsi :

$$8 = 2 + 3 \times 2$$

et :

$$26 = 2 + 3 \times 8 = 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2.$$

On a envie de penser que le coefficient en haut à gauche de  $M^r$  est :

$$2(1 + 3 + \dots + 3^{r-1}) = 2 \frac{3^r - 1}{3 - 1} = 3^r - 1,$$

et qu'on a :

$$M^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^r - 1 \\ 0 & 2^r & 0 \\ 0 & 0 & 3^r \end{pmatrix}.$$

Supposons que c'est le cas et multiplions cette matrice par  $M$  pour voir si la formule est correcte au rang  $r + 1$ . On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^{r+1} - 1 \\ 0 & 2^{r+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{r+1} \end{pmatrix},$$

nous avons montré, par récurrence, que :

$$M^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^r - 1 \\ 0 & 2^r & 0 \\ 0 & 0 & 3^r \end{pmatrix}.$$

**Correction 32** 1. On applique la formule du produit matriciel. On commence par calculer le coefficient  $(AE_{ij})_{rs}$  d'indice  $(r, s)$  de la matrice  $AE_{ij}$ . Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^n a_{rk} (E_{ij})_{ks}.$$

Or, le coefficient d'indice  $(k, s)$  de  $E_{ij}$  est nul sauf si  $i = k$  et  $s = j$ . On en déduit que :

$$(AE_{ij})_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq j \\ a_{ri} & \text{si } s = j. \end{cases}$$

On calcule maintenant le coefficient  $(AE_{ij}B)_{rl}$  d'indice  $(r, l)$  de la matrice  $AE_{ij}B$ . Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^n (AE_{ij})_{rk} b_{kl}.$$

Seul le terme d'indice  $k = j$  est non-nul, on a donc :

$$(AE_{ij}B)_{rl} = a_{ri} b_{jl}.$$

2. Supposons par l'absurde que  $B$  et  $A$  sont non-nulles. Alors, il existe deux coefficients  $a_{i_0 j_0}$  et  $b_{i_1 j_1}$  non-nuls. On considère alors le produit matriciel  $AE_{j_0 i_1} B$ . Par hypothèse, ce produit matriciel est nul. Or, d'après le calcul précédent, le coefficient d'indice  $(i_0, j_1)$  de la matrice  $AE_{j_0 i_1} B$  est égal à  $a_{i_0 j_0} b_{i_1 j_1}$ , il est donc nul ce qui est une contradiction. On a montré, par l'absurde, que  $A$  ou  $B$  est la matrice nulle.

**Correction 33** Comme on a  $(AX)^2 = (0)$  pour tout  $X$ , c'est vrai en particulier pour une matrice élémentaire. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , alors  $(E_{ij}A)^2 = (0)$ . Explicitons la matrice  $E_{ij}A$  puis son carré.

On écrit  $A = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl} E_{kl}$ . Alors

$$E_{ij}A = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl} E_{ij} E_{kl}.$$

Or pour  $k \neq j$ ,  $E_{ij} E_{kl} = (0)$ , on en déduit que  $\sum_{k=1}^n a_{kl} E_{ij} E_{kl} = a_{jl} E_{il}$ . Ainsi,

$$E_{ij}A = \sum_{l=1}^n a_{jl} E_{il}.$$



**Correction 36** Soit  $r \in \mathbb{N}$ . On pose  $M_{ab} = bJ + (a - b)I$  avec  $J$  la matrice avec uniquement des 1. On sait que  $\forall k \geq 1, J^k = n^{k-1}J$ . On applique le binôme de Newton car  $I$  et  $J$  commutent :

$$\begin{aligned}
 (bJ + (a - b)I)^r &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} b^k J^k (a - b)^{r-k} \\
 &= (a - b)^r I_n + \left( \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} b^k n^{k-1} (a - b)^{r-k} \right) J \\
 &= (a - b)^r I_n + \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (bn)^k (a - b)^{r-k} \right) J \\
 &= (a - b)^r I_n + \frac{1}{n} ((bn + a - b)^r - (a - b)^r) J
 \end{aligned}$$