Correction du TD n 10

Correction 1 On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ car la somme des colonnes donne toujours le même nombre. On factorise alors par $1+2a+2b$ puis on enlève la première ligne à toutes les autres lignes. On développe par rapport à la première colonne et on obtient :

$$\det(M) = (1+2a+2b)\begin{vmatrix} 1+a-b & b-a & a-b \\ 0 & 1 & 0 \\ a-b & b-a & 1+a-b \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la deuxième ligne. On trouve $(1+2a+2b)((1+a-b)^2-(a-b)^2) = (1+2a+2b)(1+2a-2b)$. La matrice M est donc inversible si et seulement si $1+2a+2b \neq 0$ et $1+2a-2b \neq 0$.

Correction 2 1. On enlève la première ligne à toutes les autres, on obtient :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 0 & a_1-a_0 & a_1^2-a_0^2 & \cdots & a_1^n-a_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_n-a_0 & a_n^2-a_0^2 & \cdots & a_n^n-a_0^n \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1-a_0 & a_1^2-a_0^2 & \cdots & a_1^n-a_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n-a_0 & a_n^2-a_0^2 & \cdots & a_n^n-a_0^n \end{vmatrix}.$$

On met alors en facteur $a_i - a_0$ sur chaque ligne :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i-a_0)\begin{vmatrix} 1 & a_0+a_1 & a_0^2+a_0a_1+a_1^2 & \cdots & a_0^{n-1}+a_0^{n-2}a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_0+a_2 & a_0^2+a_0a_2+a_2^2 & \cdots & a_0^{n-1}+a_0^{n-2}a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & a_0+a_n & a_0^2+a_0a_n+a_n^2 & \cdots & a_0^{n-1}+a_0^{n-2}a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On fait ensuite $C_1 \leftarrow C_1 - a_0 C_2$ ce qui donne :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i-a_0)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_0^2+a_0a_1+a_1^2 & \cdots & a_0^{n-1}+a_0^{n-2}a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_0^2+a_0a_2+a_2^2 & \cdots & a_0^{n-1}+a_0^{n-2}a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_0^2+a_0a_n+a_n^2 & \cdots & a_0^{n-1}+a_0^{n-2}a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

puis $C_3 \leftarrow C_3 - a_0^2 C_1 - a_0 C_2$ pour obtenir :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i-a_0)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_0^{n-1}+a_0^{n-2}a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_0^{n-1}+a_0^{n-2}a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_0^{n-1}+a_0^{n-2}a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et ainsi de suite jusqu'à obtenir :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i-a_0)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n}(a_i-a_0)\right)V(a_1, \cdots, a_n).$$

2. Déterminons la valeur de $V(a_0, \cdots, a_n)$ par récurrence sur n. On note P_n la propriété $V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i<j<n}(a_j - a_i)$.

   Pour $n = 1$, on a :
   $$V(a_0, a_1) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = (a_1 - a_0)$$
   et la propriété est vraie.

   On suppose que la propriété est vraie au rang $n-1$. D'après la question précédente, on a :
   $$V(a_0, \cdots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n}(a_1-a_0)\right)V(a_1, \cdots, a_n).$$

Or, par hypothèse de récurrence appliquée aux n réels distincts $a_1, \cdots, a_n$, on a :

$$V(a_1, \cdots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n}(a_1 - a_0)\right) \prod_{1 \leqslant i<j<n}(a_j - a_i),$$

d'où :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i<j<n}(a_j - a_i).$$

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

Correction 3 On note D le déterminant recherché. On fait $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m & 2 & -1 \\ 0 & 1-m^2 & -1-2m & 2m \\ 0 & 1-m & m-2 & 2 \\ 0 & m & 0 & m \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne, on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 1-m^2 & -1-2m & 2m \\ 1-m & m-2 & 2 \\ m & 0 & m \end{vmatrix}$$

On fait alors $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ puis on développe par rapport à la dernière ligne et on obtient :

$$D = m \begin{vmatrix} -1-m^2-2m & -1-2m \\ -m-1 & m-2 \end{vmatrix} = m(-m^3 - 2m^2 + 2m - 3)$$

Correction 4 On fait $L_i \leftarrow L_1$ pour tout $i > 1$, on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -x & & & \vdots \\ 1 & 0 & 1-x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & n-1-x \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} -x & & & 0 \\ 0 & 1-x & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n-1-x \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}(k-x)$$

Correction 5 On observe que $C_2 - C_1 = C_3 - C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc le déterminant est nul.

Correction 6

1. On développe par rapport à la première colonne, on obtient :

$$D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - a \begin{vmatrix} b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

   On développe ensuite le deuxième déterminant par rapport à sa première ligne, on obtient

$$D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - abD_n.$$

2. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont les racines réelles sont a et b. On a $D_1 = a + b$ et $D_2 = a^2 + b^2 + ab$
   - Si $a = b = 0$, $D_n = 0$ pour tout n.
   - Si $a = b \neq 0$, on sait que D_n est de la forme $(\alpha + \beta n)a^n$. Avec les premières valeurs, on obtient $\alpha + \beta = 2$ et $\alpha + 2\beta = 3$ donc $\alpha = \beta = 1$ et $D_n = (n + 1)a^n$.
   - Si $a \neq b$, on sait que D_n est de la forme $\alpha a^n + \beta b^n$. Avec les premières valeurs, on obtient $\alpha a + \beta b = a + b$ et $\alpha a^2 + \beta b^2 = a^2 + b^2 + ab$ donc $\beta b(b - a) = b^2$ et $\alpha a(a - b) = a^2$. Si $a = 0$, $D_n = b^n$ et si $b = 0$, $D_n = b^n$. Si $ab \neq 0$, on a $\alpha = \dfrac{a}{a-b}$ et $\beta = -\dfrac{b}{a-b}$ donc

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

     On remarque que cette formule reste vraie si a ou b est nul.