Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2024-2025
Feuille 10bis

TD 10bis: Déterminant.

Exercice 1.
Soit $M = \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}$. Calculer $\det(M)$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour M.

Exercice 2.
Soit $(a_i)_{i \in N}$ une famille de réels distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$V(a_0, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $V(a_0, \cdots, a_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0) V(a_1, \cdots, a_n)$.
2. En déduire la valeur de $V(a_0, \cdots, a_n)$.

Exercice 3.
Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & m & 2 & -1 \\ m & 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & 0 & m \end{pmatrix}$.

Exercice 4. [CCP]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n-x \end{vmatrix}$

Exercice 5. [CCP]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}$

Exercice 6.
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$

1. Exprimer D_{n+2} en fonction de D_{n+1} et D_n.
2. En déduire une expression de D_n pour tout $n \geqslant 1$.