Devoir surveillé 3.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1. Vérifier que l'on définit bien une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer un DL_2 de f en 0.
4. Donner l'équation de la tangente en 0.
5. Résoudre l'équation $a = f(x)$ en discutant suivant la valeur du réel a.
6. L'application est-elle injective, surjective, bijective? Préciser $\mathrm{Im}(f)$.
7. Vérifier que f induit une application bijective $\tilde{f}$, dont on précisera les ensembles de départ et d'arrivée ainsi que l'expression de l'application réciproque.
8. Dresser le tableau de variations de f et retrouver, partiellement, le résultat de la question précédente.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ selon les valeurs de $p \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)^n$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$.

Exercice 3.
On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que la suite $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que:

$$z_0 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq 0$$

On suppose dans toute la suite que $z_0 \notin \mathbb{R}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ un argument de z_n. Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |z_{n+1}| = |z_n| \cdot \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \text{ et } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

   (b) En déduire que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
   (c) Montrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (d) En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On pose $I = \lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|$.

3. (a) Montrer que:

$$\forall n \in N, |z_n| = \frac{\operatorname{Im}(z_0)}{2^n \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}$$

   (b) En déduire que:

$$I = \frac{\operatorname{Im}(z_0)}{\theta_0}$$

4. Soit $\alpha \in]0, \pi[$, on suppose que $z_0 = e^{i\alpha}$
   (a) Montrer que:

$$\forall k \in N, \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)$$

   (b) En déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) = |z_n|$$

   (c) Montrer que la suite:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

   est convergente et calculer sa limite en fonction de α.

Exercice 4.

On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\sinh(x)) \text{ et } g(x) = \arctan\left(\frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}\right)$$

Le but du problème est de montrer, par deux méthodes différentes, que $f = g$.

1. Première méthode: en utilisant les dérivées
   (a) Préciser et justifier le domaine de définition de f et g.
   (b) préciser les points où f est dérivable et montrer que $f' = \dfrac{1}{2\cosh}$.
   (c) Faire de même avec la fonction g.
   (d) En déduire que $f = g$.

2. Deuxième méthode: trigonométrique
   (a) Donner un exemple de deux réels a et b distincts avec $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $b \in]-\pi, \pi[$ et tels que $\tan(a) = \tan(b)$.
   (b) Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.
   (c) En déduire que:
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(2f(x)) = \sinh(x)$$
   On considère maintenant la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}$.
   (d) En étudiant la fonction h (variations, limites...) montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \in]-1, 1[$.
   (e) En déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$$
   (f) Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$.
   (g) En déduire que pour tout réel x, $\tan(2g(x)) = \sinh(x)$.
   (h) En déduire que $f = g$.

3. Une application de l'égalité entre f et g.
   (a) En utilisant la définition de sinh et cosh, donner une expression simple de $\cosh\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$ et $\sinh\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$.
   (b) En utilisant l'égalité $f(x) = g(x)$, pour $x = \frac{\ln 3}{2}$, la tangente de quel angle peut-on déduire?
   (c) Résoudre l'équation $\text{sh}(a) = 1$ d'inconnue a puis, en comparant $f(a)$ et $g(a)$, en déduire la tangente d'un autre angle.

Correction du DS n 3

écrire

Onposepourtout

$x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Exercice 1 *1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas et la racine carrée est bien définie, f est bien définie sur $\mathbb{R}$. On peut aussi calculer le discriminant qui est strictement négatif.*

certains vérifient seulement que le dénominateur ne s'annule pas ou que ce qu'il y a sous la racine est positif.

2. *On a $x^2+x+1 \sim_{+\infty} x^2$ donc en prenant la puissance $-\frac{1}{2}$, $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$. De même, $x^2+x+1 \sim_{-\infty} x^2$ donc en prenant la puissance $\frac{1}{2}$, $f(x) \sim_{-\infty} \frac{1}{|x|}$ ou encore $f(x) \sim_{-\infty} -\frac{1}{x}$.*

   Je vous rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$... Si vous réfléchissez un peu, écrire $f(x) \sim_{-\infty} \frac{1}{x}$ signifie qu'en faisant le quotient d'une fonction positive par une fonction négative (au voisinage de $-\infty$), on obtient une limite égale à 1. Avouez que ça parait difficile.

3. *On applique le DL2 de $(1+X)^{-1/2}$ avec $X = x+x^2$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2}(x+x^2) + \frac{3}{8}(x+x^2)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \end{aligned}$$

   Certains ont utilisé le DL de $(1+X)^{1/2}$, il faut ensuite utiliser celui de $\frac{1}{1+X}$ pour arriver au DL demandé.

4. *D'après la question précédente, un DL1 de f est 0 est $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$, donc l'équation de la tangente en 0 est $y = 1 - \frac{x}{2}$.*
   Pas besoin de dériver f, c'est tout l'intérêt d'avoir un DL. C'est d'autant plus dommage d'avoir dérivé que la plupart du temps, la dérivée est fausse.

5. *On commence par remarquer que si $a \leqslant 0$, a n'a pas d'antécédent par f. Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$,*

$$\begin{aligned} f(x) = a \quad &\Leftrightarrow a\sqrt{x^2+x+1} = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2(x^2+x+1) \text{ car } a \text{ est positif donc les deux membres le sont} \\ &= a^2x^2 + a^2x + (a^2-1) \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme (de degré 2 car $a \neq 0$) vaut $a^4 - 4a^2(a^2-1) = 4a^2 - 3a^4$. Si $4a^2 - 3a^4 < 0$ c'est-à-dire si $a > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, alors a n'a pas d'antécédent puisque le polynôme n'a pas de racine réelle. Si $a \in \left]0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$, alors

$$f(x) = a \Leftrightarrow x = \frac{-a^2 \pm \sqrt{4a^2 - 3a^4}}{2a^2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{4 - 3a^2}$$

et $f(x) = a$ admet deux solutions réelles, éventuellement confondues.

Rédaction catastrophique sur cette question avec des hypothèses sur a pas bien claires (voire des hypothèses sur x !?!?

6. *D'après le travail fait à la question précédente, on voit que f n'est pas injective puisque pour $a \in \left]0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right[$, a possède deux antécédents distincts. L'application n'est pas surjective car les réels négatifs n'ont pas d'antécédent par f. On a montré à la question précédente que a admet un antécédent par f si et seulement si $a \in \left]0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$ donc $Im(f) = \left]0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$.*

   Je crois qu'il n'y a qu'une copie où j'ai vu une justification correcte de l'image, la plupart m'ont simplement dit "on a ".

7. *On remarque que si $a \in \left]0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$, alors $f(x) = a$ admet deux solutions : $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - 3a^2}$ et il est clair que une et une seule de ces solutions est supérieur à $-\dfrac{1}{2}$. On en déduit que $\tilde{f} = f|_{\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[}^{\left]0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]}$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$\tilde{f}^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right] & \longrightarrow & \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - 3x^2} \end{array} \right. .$$

8. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x + x^2)^{-1/2}$ donc*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1 + 2x}{2(1 + x + x^2)^{3/2}}.$$

   On en déduit que $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{1}{2}$. Les limites en $\pm\infty$ sont nulles et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	*0*	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	*0*

On peut aussi, comme Tom S, s'éviter une dérivée sur laquelle on risque de faire des erreurs de calcul en disant que $x \mapsto x^2+x+1$ est décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et croissante sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ (d'après l'étude du polynôme faite précédemment) donc, par croissance de la racine et décroissance de la fonction inverse, on a le tableau de variations de f. Joli, non?

La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ donc injective et

$$f\left(\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) = \left]0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$$

donc f induit une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ vers $\left]0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ ce qui est cohérent avec ce que l'on a trouvé à la question précédente.

J'attendais une justification rigoureuse ici, rédigée comme on l'a fait dans le chapitre "ensembles et applications".

Exercice 2 1. On a $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k$. On reconnaît une somme géométrique. Si la raison est différente de 1 c'est-à-dire pour $p \not\equiv 0[n]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \frac{1-\omega^{pn}}{1-\omega^p} = 0.$$

Si p est un multiple de n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Premier écueil: remarquer qu'il faut que la raison soit différente de 1 pour appliquer la formule (c'était pourtant l'objet de DEUX interros de cours). deuxième écueil: résoudre correctement $w^p = 1$ et non, ce n'est pas seulement pour $p = 0$ (et/ou $p = n$). troisième écueil: remarquer que $w^{np} = 1$ et qu'il était donc tout à fait inutile de se lancer dans une factorisation par l'arc moitié.

2. On va utiliser le binôme de Newton:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{kj} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj}$$

D'après la question précédente, on sait que la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kj}$ est nulle sauf si j est un multiple de n et dans ce cas, elle vaut n. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = \underbrace{n\binom{n}{0}}_{j=0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \omega^{kj}}_{=0} + \underbrace{n\binom{n}{n}}_{j=n} = 2n.$$

Je suis effarée par le nb de personnes qui ont appelé encore k l'indice dans le binôme de Newton !

3. On utilise la factorisation par l'arc moitié :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}2^n(-1)^k\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n \quad \text{car } e^{ik\pi}=(-1)^k \\
&= 2^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n.
\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^n = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

4. On écrit $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\omega^k$ puis on permute les deux sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\omega^k \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\omega^j-1}{1-\omega} \text{en reconnaissant une suite géométrique} \\
&= \frac{1}{1-\omega}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\omega^j - \sum_{j=0}^{n-1}1\right) \\
&= -\frac{n}{1-\omega} \text{car la première somme est nulle d'après la question 1}
\end{aligned}$$

Pour une raison obscure, vous avez tous coupé la somme en deux sommes alors que le $k+1$ est là précisément pour vous simplifier la vie dans les calculs.

Exercice 3 On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$z_0 \in \mathbb{C}$$
$$\forall n \in N, z_{n+1} = \frac{z_n+|z_n|}{2}$$

1. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$, on remarque que $\mathcal{I}m\left(\frac{|z_n|}{2}\right)=0$ puisque $|z_n|$ est un réel ainsi, par linéarité de la partie imaginaire, on a $\mathcal{I}m(z_{n+1}) = \mathcal{I}m\left(\frac{z_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{I}m(z_n)$. La suite $(\mathcal{I}m(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   Avant de se lancer dans les calculs, on définit n ! c'est une question sympa, le résultat vous est donné, si vous pouviez prendre la peine de justifier pourquoi c'est vrai !! On évite de faire le quotient de $\mathcal{I}m(z_{n+1})$ par $\mathcal{I}m(z_n)$ sans savoir si on divise par une quantité nulle. Et évidemment, le quotient des parties imaginaires n'a aucun lien avec la partie imaginaire du quotient.

   (b) On veut montrer que

$$z_0 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq 0$$

Soit donc $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\mathcal{I}m(z_0) \neq 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}m(z_n) = \dfrac{1}{2^n}\mathcal{I}m(z_0)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{I}m(z_n) \neq 0$.

Là, certains se sont embourbés pour me montrer que $z_n \notin \mathbb{R}$ donc $z_n \neq 0$ par récurrence. Certains ont tenté une contraposée (avec toujours l'erreur classique de nier $\forall n$ par $\forall n$). Pour info, $z_0 \notin \mathbb{R}$ ne signifie pas du tout que z_0 est un imaginaire pur. La question précédente n'était là que pour faire facilement cette question.

On suppose dans toute la suite que $z_0 \notin \mathbb{R}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\theta_n = \arg(z_n)$ avec $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ et on écrit $z_n = |z_n|\, e^{i\theta_n}$. On a alors

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{z_n + |z_n|}{2} \\ &= \frac{|z_n|\,(e^{i\theta_n}+1)}{2} \\ &= \frac{|z_n|\, e^{\frac{i\theta_n}{2}}\, 2\cos\frac{\theta_n}{2}}{2} \\ &\text{en utilisant la factorisation par l'arc moitié} \\ &= |z_n|\, e^{\frac{i\theta_n}{2}} \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\theta_n}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) \geqslant 0$. On en déduit que l'on a écrit z_{n+1} sous forme exponentielle. Par unicité de l'écriture, on a

$$|z_{n+1}| = |z_n| \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \quad \text{et } \arg z_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

Comme $\dfrac{\theta_n}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \subset]-\pi, \pi]$, on a bien $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.

Beaucoup d'apprentis magiciens qui ont pris le module de z_{n+1} et fait disparaître miraculeusement la valeur absolue. Attention, θ_n n'est pas simplement UN argument de z_n mais LE SEUL entre $-\pi$ et π, il est donc impératif de vérifier si $\theta_n/2$ est bien dans cet intervalle pour affirmer qu'il est égal à θ_{n+1}.

(b) La suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]0,1[$ donc elle tend vers 0.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $|z_{n+1}| \leqslant |z_n|$ donc la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0, on en déduit qu'elle converge.

Cette question c'était un festival. On m'a parlé de suite géométrique de raison $\cos\theta_n/2$, on m'a écrit $|z_n| \to |z_{n+1}|$ ou encore, " quand n tend vers $+\infty$, $|z_n| = |z_{n+1}|$. IL NE RESTE PAS DE n quand on l'a fait tendre vers qqch !!!!

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = |z_n|\, e^{i\theta_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{i\theta_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (\cos\theta_n + i\sin\theta_n) = 1$ par continuité de cos et sin. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente en tant que produit de deux suites convergentes.

On pose $I = \lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|$.

3. (a) Le plus simple est d'écrire: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}m(z_n) = |z_n|\sin(\theta_n)$ puis de remplacer $\mathcal{I}m(z_n)$ par $\dfrac{\mathcal{I}m(z_0)}{2^n}$ et θ_n par $\dfrac{\theta_0}{2^n}$. En diviser par le sinus qui est non nul, on a l'égalité. On peut aussi raisonner par récurrence sur n :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$HR(n) : \text{"}\ |z_n| = \frac{\mathcal{I}m(z_0)}{2^n \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}\text{"}$$

Pour $n = 0$, on a $\mathcal{I}m(z_0) = |z_0| \sin\theta_0$ donc $|z_0| = \dfrac{\mathcal{I}m(z_0)}{\sin\theta_0}$, le résultat est donc vrai au rang 0.

Soit n un entier tel que $HR(n)$ est vraie, montrons que $HR(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}| &= |z_n| \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \\
&= \frac{\mathcal{I}m(z_0)}{2^n \sin\frac{\theta_0}{2^n}} \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\mathcal{I}m(z_0)}{2^n \sin\frac{\theta_0}{2^n}} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right) \text{ en remplaçant } \theta_n \text{ par son expression} \\
&= \frac{\mathcal{I}m(z_0)}{2^n . 2\sin\frac{\theta_0}{2^{n+1}} \cos\frac{\theta_0}{2^{n+1}}} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{\mathcal{I}m(z_0)}{2^{n+1} \sin\frac{\theta_0}{2^{n+1}}}
\end{aligned}$$

On en déduit que la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence simple, la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(b) On a supposé $z_0 \notin \mathbb{R}$ donc $\theta_0 \neq 0$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\theta_0}{2^n} = 0$ donc $\sin\dfrac{\theta_0}{2^n} \sim \dfrac{\theta_0}{2^n}$ puis $2^n \sin\dfrac{\theta_0}{2^n} \sim \theta_0$. Ainsi, $|z_n| \sim \dfrac{\mathcal{I}m(z_0)}{\theta_0}$ donc $l = \dfrac{\mathcal{I}m(z_0)}{\theta_0}$ par unicité de la limite.

4. Soit $\alpha \in]0, \pi[$, on suppose $z_0 = e^{i\alpha}$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on sait déjà, comme $z_0 \notin \mathbb{R}$, que $|z_{k+1}| = |z_k| \cos\left(\dfrac{\theta_k}{2}\right)$ et que $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. On a donc

$$|z_{k+1}| = |z_k| \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{k+1}}\right) = |z_k| \cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right).$$

Il ne reste plus qu'à diviser par $|z_k|$ ce qui est possible car $z_0 \notin \mathbb{R}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On fait le produit pour k variant de 0 à $n-1$ de l'égalité trouvée à la question précédente :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right).$$

On reconnaît un produit télescopique, on a donc

$$\frac{|z_n|}{|z_0|} = \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right).$$

Or $|z_0| = 1$ et, par un changement d'indice $j = k+1$, on obtient

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right) = \prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^j}\right).$$

L'indice i étant muet, on a bien le résultat souhaité.

(c) On sait déjà que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente, de limite $l = \dfrac{\mathcal{I}m(z_0)}{\theta_0} = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

Exercice 4 1. (a) sinh est définie sur $\mathbb{R}$, arctan aussi donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
cosh et sinh sont définies sur $\mathbb{R}$ et cosh est strictement positif donc le quotient $\dfrac{\sinh}{1+\cosh}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et, par suite, g est définie sur $\mathbb{R}$.
De l'intérêt de bien connaître les domaines de définitions et les images des fonctions usuelles.

(b) f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\cosh}{1+\sinh^2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\cosh}{\cosh^2} = \dfrac{1}{2\cosh}$.
Attention à ne pas écrire $f'(x) = \dfrac{1}{2\cosh}$ (donc un réel= une fonction).

(c) g est dérivable en tout point. On a

$$\left(\frac{\sinh}{1+\cosh}\right)' = \frac{\cosh(1+\cosh)-\sinh^2}{(1+\cosh)^2} = \frac{1+\cosh}{(1+\cosh)^2}$$

donc

$$\begin{aligned} g' &= \frac{1+\cosh}{(1+\cosh)^2\left(1+\dfrac{\sinh^2}{(1+\cosh)^2}\right)} \\ &= \frac{1+\cosh}{(1+\cosh)^2+\sinh^2} \\ &= \frac{1+\cosh}{1+2\cosh+\cosh^2+\sinh^2} \\ &= \frac{1+\cosh}{2\cosh+2\cosh^2} = \frac{1}{2\cosh} \end{aligned}.$$

(d) f et g ont même dérivée, elles sont donc égales à constante près. On les évalue en une même valeur:

$$f(0) = \frac{1}{2}\arctan(0) = 0 \text{ et } g(0) = \arctan(0) = 0$$

donc elles sont égales.

2. (a) On a $\tan(-\frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{2\pi}{3})$.

(b) On sait que l'image de arctan est $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc l'image de f est incluse dans $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$.

(c) D'après la question précédente, $\forall x\in\mathbb{R}, 2f(x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\tan(2f(x))$ est bien définie et vaut $\tan(\arctan(\sinh(x))) = \sinh(x)$.

Je n'ai pas compris pourquoi certains ont invoqué l'injectivité de tan sur cet intervalle. Certains ont raisonné par équivalence (pourquoi prendre ce risque ???). Si vous faites ça, n'oubliez pas de conclure !

(d) On a déjà calculé sa dérivée: $h' = \dfrac{1}{1+\cosh}$, elle est positive donc h est croissante. On calcule les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{2e^x+e^{2x}+1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{2x}}{2e^{-x}+e^{-2x}+1} = 1$$

On peut aussi utiliser les équivalents de sinh et cosh que nous avons vu. On a donc $\forall x\in\mathbb{R}, h(x)\in]-1,1[$.

(e) Par croissance de arctan, on a donc, pour tout réel x,

$$\arctan(-1) < \arctan(h(x)) < \arctan(1),$$

soit $g(x)\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$.

Dire que $\arctan(\pm1)=\pm\frac{\pi}{4}$ *ne suffit pas*

(f) Pour $\theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$, $2\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan(2\theta)$ est bien définie. On sait que $\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ donc

$$\tan(2\theta)=\frac{\tan(\theta)+\tan(\theta)}{1-\tan^2\theta}=\frac{\tan(2\theta)}{1-\tan^2\theta}$$

N'oubliez pas de préciser que 2θ *appartient bien au domaine de définition de* tan.

(g) Soit $x\in\mathbb{R}$. On applique la formule que l'on vient de montrer à $g(x)$ qui appartient bien à $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$:

$$\tan(2g(x))=\frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2(g(x))}=\frac{2\dfrac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}}{1-\dfrac{\sinh^2(x)}{(1+\cosh(x))^2}}$$

soit, après simplification: $\tan(2g(x))=\sinh(x)$ et ceci est valable pour tout x réel.
Il est impératif de mentionner que l'on peut appliquer la question précédente car $g(x)$ *est bien là où ça marche.*

(h) On a, pour tout réel x, $\tan(2g(x))=\tan(2f(x))$ avec $2f(x)$ et $2g(x)$ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel tan est injective, donc $2g(x)=2f(x)$ et, par suite, $f=g$.

3. (a) On a $\cosh\left(\frac{\ln 3}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\sinh\left(\frac{\ln 3}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
Beaucoup d'erreurs dans ces simplifications...

(b) En appliquant $f(x)=g(x)$ avec $x=\frac{\ln 3}{2}$, on obtient

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)$$

soit $\frac{\pi}{12}=\arctan\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

(c) Soit $a\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\sinh(a)=1 &\Leftrightarrow e^a-e^{-a}=2\\ &\Leftrightarrow (e^a)^2-2(e^a)-1=0\end{aligned}$$

Le polynôme a deux racines $1 \pm \sqrt{2}$ mais une seule est positive. On a donc $a = \ln(1+\sqrt{2})$.
On a $f(\ln(1+\sqrt{2})) = \dfrac{1}{2}\arctan(1) = \dfrac{\pi}{8}$ et $g(\ln(1+\sqrt{2})) = \ldots = \ldots = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = -1+\sqrt{2}$.
On en déduit que $\tan\dfrac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$