Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 4

Devoir surveillé 4.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.
Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par récurrence par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ soit constante et la déterminer.

2. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Montrer que sa limite est nulle en utilisant l'unicité de la limite.

3. On suppose que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > \sqrt{n}$. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

4. On suppose maintenant qu'il existe un entier k tel que $u_k \leqslant \sqrt{k}$.

   (a) Montrer que pour tout entier n strictement supérieur à k, $u_n < \sqrt{n}$.

   (b) En déduire la nature de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et sa limite si elle existe?

On introduit maintenant la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie de la manière suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{2^{k+1}}$.

5. Soit $\beta \in]0;1[$. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\beta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta^k$ converge et donner sa limite.

6. Exprimer $\dfrac{\ln u_n}{2^{n-1}}$ en fonction de a et v_{n-1} pour tout entier n.
   Indication : On pourra chercher une formule valable pour u_2, u_3, u_4 et u_5 puis la montrer par récurrence.

7. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout entier k, on ait
$$\frac{\ln k}{2^{k+1}} \leqslant M \left(\frac{2}{3}\right)^k$$
   Indication : utiliser les croissances comparées.

8. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée puis qu'elle converge.

Soit ℓ la limite de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

9. Énoncer la définition avec des ϵ de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

10. On suppose $\ln a < \ell$

    (a) montrer que
$$\exists \lambda > 0, \exists N \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant N \Rightarrow \ln a - v_n < -\lambda$$

    (b) En déduire que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

11. On suppose désormais que $\ln a > \ell$.

(a) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ln a - v_n > \lambda$$

(b) En déduire que $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2.
Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, montrer que

$$\left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor = 2nm.$$

Exercice 3.
Dans tout le problème, si $a, b \in \mathbb{R}$, on note $(E_{a,b})$ l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = 0 \qquad (E_{a,b})$$

L'objectif est de résoudre cette équation (appelée équation d'Euler) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie I - Un exemple

Dans cette partie, on se place sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$, et on note (E) l'équation $(E_{-1,-3})$:

$$t^2 y''(t) - ty'(t) - 3y(t) = 0 \qquad (E)$$

d'inconnue $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

1. Montrer qu'il existe exactement deux réels r (que l'on précisera) tels que $t \mapsto t^r$ soit solution de (E) sur I. Dans la suite de l'énoncé, on notera $r_1 < r_2$ ces deux réels.

2. Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, et soit $W : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^{r_2} y'(t) - r_2 t^{r_2 - 1} y(t) \end{array} \right.$.

   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si W est solution de l'équation différentielle (E_W) : $z'(t) - \frac{z(t)}{t} = 0$, de fonction inconnue z.

   (b) Résoudre (E_W) et en déduire que y est solution de (E) si et seulement

   $$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(t) - \frac{3}{t} y(t) = \frac{\lambda}{t^2}$$

   (c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\{t \mapsto \lambda t^{r_1} + \mu t^{r_2} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Partie II - Wronskien

Dans cette partie, on considère m et n deux fonctions continues à valeurs réelles sur un intervalle I, et on note (E_0) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, à coefficients non constants :

$$\forall t \in I,\ y''(t) + m(t)y'(t) + n(t)y(t) = 0 \qquad (E_0)$$

que l'on peut réécrire de façon fonctionnelle :

$$y'' + my' + ny = 0 \qquad (E_0)$$

On suppose dans la suite qu'il existe une solution de (E_0) qui ne s'annule pas sur I, et on se fixe f une telle solution. Si $g : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, on appelle *wronskien* de f et g, et on note W_g la fonction

$$W_g = fg' - f'g.$$

3. Montrer qu'une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est solution de (E_0) si et seulement si W_g est solution de l'équation $y' + my = 0$.

4. Exprimer, pour toute fonction g dérivable sur I, la dérivée de $\frac{g}{f}$ à l'aide de W_g et de f.

5. A l'aide des questions précédentes, expliquer en quelques phrases une méthode pour déterminer, à partir de la connaissance des fonctions m et f, toutes les solutions de (E_0).

6. Plus précisément, montrer qu'il existe une fonction f_1, non colinéaire à f (c'est-à-dire telle que $\forall\lambda \in \mathbb{R}, f_1 \neq \lambda f$) telle que l'ensemble des solutions de (E_0) soit égal à $\{\lambda f + \mu f_1 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
   On expliquera clairement une méthode pour calculer une telle fonction f_1.

7. Application : montrer que $\frac{1}{\mathrm{sh}}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation : $y''(t) + \frac{2\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)}y'(t) + y(t) = 0$.
   En déduire l'ensemble des solutions de cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. Montrer que si f_2 est une solution de (E_0) non colinéaire à f, alors l'ensemble des solutions de (E_0) est aussi $\{\lambda f + \mu f_2 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Partie III - Résolution de l'équation d'Euler

Dans cette partie, a et b sont deux réels. On note P le polynôme $X^2 + (a-1)X + b$.

9. Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que $t \mapsto t^r$ est solution de $(E_{a,b})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si r est une racine de P.

Dans la suite, on note Δ le discriminant de P.

10. Premier cas : $\Delta > 0$. On suppose que P possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. En utilisant la partie II, déterminer l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11. Deuxième cas : $\Delta = 0$. On suppose dans cette question que P possède une racine double r. Montrer qu'on a alors $a + 2r = 1$, puis déterminer l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

12. Troisième cas : $\Delta < 0$. On suppose à présent que P possède deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.

    (a) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $t^\lambda = e^{\lambda \ln(t)}$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, y_\lambda : t \mapsto t^\lambda$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer y'_λ et y''_λ.

    (b) En admettant que les résultats de la partie II restent valables pour des fonctions à valeurs complexes (aucune difficulté puisque les calculs sont rigoureusement les mêmes), déterminer l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ à valeurs complexes, puis réelles.

Correction du DS n 4

Exercice 1 Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par récurrence par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, a = \dfrac{a^2}{\sqrt{n}}$. On a donc, pour $n = 1$, $a^2 = a$ donc $a = 0$ ou $a = 1$. Pour $n = 2$, $\sqrt{2}a = a^2$, ce qui impose $a = 0$. Réciproquement, si $a = 0$, la suite nulle vérifie bien $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$. Il y a donc bien une unique valeur de a pour laquelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante.

   La plupart d'entre vous est partie de u_n alors que l'on vous demande une condition sur u_1. Ceux qui ont pensé à mettre des quantificateurs sont arrivés à

   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ constante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^\star, a = 0 \textit{ ou } a = \sqrt{n}$$

   et ont conclu en me disant que la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'était pas constante donc que l'on n'avait jamais $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = \sqrt{n}$. Cette assertion est juste. Problème, vous n'avez pas montré que cette assertion était un des cas. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 0$ ou $u_n = \sqrt{n}$ n'est pas la même chose que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = \sqrt{n}$

2. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite L. Alors $u_{n+1} \to L$. Or $\dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} \to 0$ donc, par unicité de la limite, $L = 0$.

   22 personnes m'ont écrit $u_{n+1} \to \dfrac{l^2}{\sqrt{n}}$ (ou l'équivalent). C'est vraiment une erreur lourde: la limite ne peut dépendre de n puisque vous avez fait tendre n vers $+\infty$.

3. On suppose que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > \sqrt{n}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$ Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} > 1,$$
   et $u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante. On a $u_1 > 1$ donc la suite ne peut converger en croissant vers 0, elle diverge donc vers $+\infty$.

   Si vous faites le quotient, il est indispensable de préciser AVANT que l'on ne divise pas par une quantité qui peut s'annuler. Pour conclure sur la monotonie de la suite, il faut préciser que (u_n) est positive (scoop: La suite de terme général $a_n = -\dfrac{1}{n+1}$ vérifie $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ et elle est pourtant croissante)

   On pouvait aussi faire la différence. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors
   $$u_{n+1} - u_n = u_n\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}} - 1\right).$$
   On sait que $u_n > \sqrt{n}$ donc $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}} - 1 > 0$ et $u_n > \sqrt{n} > 0$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.

   Par le théorème de minoration, la limite de la suite est $+\infty$.

   Beaucoup d'entre vous oublient de parler du deuxième facteur.

4. On suppose maintenant qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u_k \leqslant \sqrt{k}$.

   (a) On va montrer que pour tout entier n supérieur à k, $u_n < \sqrt{n}$ par récurrence sur n. Pour tout $n > k$, on pose donc $HR(n)$: "$u_n < \sqrt{n}$". *Initialisation:* Au rang $k+1$, on a :
   $$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{u_k^2}{\sqrt{k}} \\ &\leqslant \sqrt{k} \\ &< \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au premier rang. On suppose maintenant qu'elle est vraie pour un certain entier $n > k$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n^2}{\sqrt{n}} \\ &\leqslant \sqrt{n} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &< \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n > k$.

(b) D'après la question précédente, on a, pour tout $n > k$, $u_n < \sqrt{n}$ donc, u_n étant positif, $u_n^2 \leqslant u_n\sqrt{n}$ puis $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Comme vous écrivez des inégalités sans préciser pour quelles valeurs de n, beaucoup ont écrit $u_{n+1} - u_n < 0$ et en on déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ était décroissante ce qui est faux. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est seulement décroissante à partir du rang k

On en déduit que la suite est décroissante à partir du rang k. Comme elle est minorée par 0, elle converge et on a vu qu'elle ne pouvait converger que vers 0.

On introduit maintenant la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie de la manière suivante : $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{2^{k+1}}$.

5. Soit $\beta \in]0;1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta^k = \dfrac{\beta - \beta^{n+1}}{1-\beta}$ car $\beta \neq 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \beta^k = \dfrac{\beta}{1-\beta}$ car $\beta^{n+1} \to 0$ puisque $\beta \in]0,1[$

6. Exprimer $\dfrac{\ln u_n}{2^{n-1}}$ en fonction de a et v_{n-1} pour tout entier n.
Indication : On pourra chercher une formule valable pour u_2, u_3, u_4 et u_5 puis la montrer par récurrence. On a

- $\ln(u_2) = 2\ln(a)$,
- $\ln(u_3) = 2\ln(u_2) - \frac{1}{2}\ln(2) = 2^2\ln(a) - \frac{1}{2}\ln(2)$
- $\ln(u_4) = 2\ln(u_3) - \frac{1}{2}\ln(3) = 2^3\ln(a) - \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3)$.
- $\ln(u_5) = 2\ln(u_4) - \frac{1}{2}\ln(4) = 2^4\ln(a) - 2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(4)$

On a donc

- $\dfrac{\ln(u_2)}{2} = \ln(a)$.
- $\dfrac{\ln(u_3}{2^2} = \ln(a) - \dfrac{1}{2^3}\ln(2)$
- $\dfrac{\ln(u_4)}{2^3} = \ln(a) - \dfrac{1}{2^3}\ln(2) - \dfrac{1}{2^4}\ln(3)$
- $\dfrac{\ln(u_5)}{2^4} = \ln(a) - \dfrac{1}{2^3}\ln(2) - \dfrac{1}{2^4}\ln(3) - \dfrac{1}{2^5}\ln(4)$

On intuite donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = 2^{n-1}(\ln(a) - v_{n-1})$. On le montre par récurrence sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $HR(n)$: " $\ln(u_n) = 2^{n-1}(\ln(a) - v_{n-1})$ ". La propriété est vraie au rang 2 (et même aux rangs 3,4 et 5!). Soit n un entier tel que $HR(n)$ est vraie. On a alors

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) &= 2\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(n) \\ &= 2\left(2^{n-1}(\ln(a) - v_{n-1})\right) - \frac{1}{2}\ln(n) \\ &\quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^n\ln(a) - 2^n v_{n-1} - \frac{1}{2}\ln(n) \\ &= 2^n\ln(a) - 2^n\left(v_{n-1} + \frac{\ln(n)}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2^n\ln(a) - 2^n v_n \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

L'énoncé vous suggère de calculer les premiers termes. Premier écueil: j'ai vu beaucoup de $u_2 = \dfrac{u_1^2}{\sqrt{2}}$ ce qui est faux car u_2 correspond à $n = 1$.

Ensuite, l'énoncé vous demande une formule pour $\dfrac{\ln(u_n)}{2^{n-1}}$ ce qui signifie, sauf à croire le concepteur sadique, que c'est plus simple que de trouver une expression de u_n (et donc pourquoi certains ont cherché une expression de u_n avec des produits????)

7. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout entier k, on ait
$$\frac{\ln k}{2^{k+1}} \leqslant M\left(\frac{2}{3}\right)^k$$
Indication : utiliser les croissances comparées.
On a
$$\frac{\ln(k)}{2^{k+1}} \leqslant M\left(\frac{2}{3}\right)^k \Leftrightarrow \frac{\ln(k)}{2\times(4/3)^k} \leqslant M.$$
On a $\dfrac{\ln(k)}{2\times(4/3)^k} \to 0$ par croissances comparées car $\dfrac{4}{3} > 1$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln(k)}{2\times(4/3)^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc M tel que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{\ln(k)}{2\times(4/3)^k} \leqslant M.$$
En multiplipliant l'inégalité par $\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$, on obtient l'inégalité souhaitée.

Certains ont pensé à diviser pour montrer que le quotient tendait vers 0 mais conclure " donc elle est majorée" ne peut suffire ! Dites-moi qu'une suite convergente est majorée ! ou bien prenez $\epsilon = 1$ et vous appliquez la définition de limite nulle.

8. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée puis qu'elle converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\ln k}{2^{k+1}} \leqslant M\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$ donc, en sommant ces inégalités, on obtient
$$v_n \leqslant M\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$
Or, d'après la question 5, comme $\dfrac{2}{3} \in]0,1[$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ converge donc elle est bornée. On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{\ln(n+1)}{2^{n+2}} \geqslant 0$ donc la suite est croissante. Par le thm de convergence monotone, on en déduit qu'elle converge.

J'ai encore vu le passage à la somme avec une équivalence... mais ce qui m'a fait le plus mal, c'est le nombre effarant de personnes qui me disent que la suite est majorée après une inégalité dont le membre de droite dépend de n !!!

Soit ℓ la limite de $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

9. Énoncer la définition avec des ϵ de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
$\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geqslant N, |v_n - \ell| < \epsilon$.

10. On suppose $\ln a < \ell$

il existe ϵ au lieu de $\forall\epsilon$, c'est faux et ne pas préciser $\forall\epsilon$ AVANT, c'est faux aussi. En effet, le rang N dépend de ϵ, il est donc impératif de le fixer avant de parler de l'existence de N.

(a) Montrons que
$$\exists\lambda > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \ln a - v_n < -\lambda$$
On pose $\epsilon = \ell - \ln(a) > 0$ et on applique la définition de limite avec $\dfrac{\epsilon}{2}$, on sait alors qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant$

$N, |v_n - \ell| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $\ell - v_n < \dfrac{\epsilon}{2}$. En écrivant $\ln(a) - v_n = \ln(a) - \ell + \ell - v_n = -\epsilon + \ell - v_n$, on obtient

$$\ln(a) - v_n < -\epsilon + \frac{\epsilon}{2}$$

donc

$$\ln(a) - v_n < -\frac{\epsilon}{2}.$$

En posant $\lambda = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, on a bien le résultat souhaité.

(b) En déduire que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

D'après la question précédente, on sait qu'il existe $\lambda > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\ln(a) - v_n < -\lambda$ donc

$$\forall n > N, n-1 \geqslant N \text{ donc } \ln(a) - v_{n-1} < -\lambda,$$

et comme $\ln(u_n) = 2^{n-1}\left(\ln(a) - v_{n-1}\right)$, on a donc

$$\forall n > N, \ln(u_n) < -2^{n-1}\lambda.$$

Par le thm de majoration, $\ln(u_n) \to -\infty$ donc $u_n \to 0$

11. On suppose désormais que $\ln a > \ell$.

(a) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln a - v_n > \lambda$$

On sait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante, elle est donc majorée par sa limite ℓ. On pose $\lambda = \dfrac{\ln(a) - \ell}{2}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\ln(a) - v_n \geqslant \ln(a) - \ell > \lambda$.

(b) En déduire que $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

D'après la question précédente, on sait qu'il existe $\lambda > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\ln(a) - v_n > \lambda$ donc

$$\forall n \geqslant N, \ln(u_n) > 2^{n-1}\lambda.$$

Par le thm de minoration, $\ln(u_n) \to \infty$ donc $u_n \to +\infty$

Exercice 2 Le plus rapide est de raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor = 2nm \quad &\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor + 2nm \\
&\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} + 2nm \right\rfloor \\
&\text{car } 2nm \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor
\end{aligned}$$

car

$$\frac{(n-m)^2}{2} + 2nm = \frac{n^2 - 2nm + m^2 + 4nm}{2} = \frac{(n+m)^2}{2}.$$

Par équivalence, on a bien l'égalité souhaitée.

Si on ne le voit pas, on procède par disjonction de cas en remarquant que $n+m$ et $n-m$ ont même parité.

- Si $n+m$ est pair, $(n+m)^2$ est pair, ainsi que $(n-m)$ et donc $(n-m)^2$.

  On en déduit que

$$\left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor = \frac{(n+m)^2}{2} - \frac{(n-m)^2}{2} = \frac{4mn}{2} = 2nm.$$

- Si $n+m$ est impair, $(n+m)^2$ est impair donc $\left\lfloor \dfrac{n+m}{2} \right\rfloor = \dfrac{(n+m)^2 - 1}{2}$. De même, comme $(n-m)$ est impair, $(n-m)^2$ est impair donc $\left\lfloor \dfrac{n-m}{2} \right\rfloor = \dfrac{(n-m)^2 - 1}{2}$. On en déduit que

$$\left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor = \frac{(n+m)^2 - 1}{2} - \frac{(n-m)^2 - 1}{2} = \frac{4mn}{2} = 2nm.$$

Par disjonction de cas, on a montré que l'égalité est vraie pour tout couple d'entiers.

On peut aussi raisonner avec des encadrements : Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, alors

$$\frac{(n+m)^2}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{(n+m)^2}{2}$$

et

$$\frac{(n-m)^2}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{(n-m)^2}{2}$$

donc

$$-\frac{(n-m)^2}{2} \leqslant -\left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor < -\frac{(n-m)^2}{2} + 1,$$

on obtient alors

$$\frac{(n+m)^2}{2} - \frac{(n-m)^2}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor < \frac{(n+m)^2}{2} - \frac{(n-m)^2}{2} + 1$$

soit, en développant :

$$2mn - 1 < \left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor < 2mn + 1.$$

Or, une inégalité stricte entre entiers peut être remplacée par une inégalité large avec un entier consécutif :

$$2mn \leqslant \left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor \leqslant 2mn,$$

d'où $\left\lfloor \frac{(n+m)^2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n-m)^2}{2} \right\rfloor = 2mn.$

On ne soustrait pas les inégalités !!!

Exercice 3 Partie I - Un exemple

1. Soit $r \in \mathbb{R}$, et soit $y_r : t \mapsto t^r$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $y_r'(t) = rt^{r-1}$ et $y_r''(t) = r(r-1)t^{r-2}$. Et donc

$$\begin{aligned}
& y_r \text{ est solution de (E)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in \mathbb{R}_+^* t^2 r(r-1)t^{r-2} - trt^{r-1} - 3t^r = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, (r(r-1) - r - 3)t^r = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \left(r^2 - 2r - 3\right) t^r = 0
\end{aligned}$$

C'est le cas ssi $r^2 - 2r - 3 = 0$, équation dont les solutions sont $\boxed{3}$ et $\boxed{-1}$.

Il est indispensable de raisonner par équivalence. Si vous commencez par supposez que $t \mapsto t^r$ est solution, il vous faudra alors vérifier ensuite que $t \mapsto t^3$ et $t \mapsto t^{-1}$ sont solutions.

2. (a) Puisque nous avons obtenu $r_2 = 3$, on a donc, pour tout $t \in I$:

$$W(t) = t^3 y'(t) - 3t^2 y(t) \qquad (*)$$

W est dérivable sur I car y et y' le sont, et pour tout $t \in I$,

$$W'(t) = t^3 y''(t) + 3t^2 y'(t) - 3t^2 y'(t) - 6ty(t) = t^3 y''(t) - 6ty(t)$$

Pour tout $t \in I$, on a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
W'(t) - \tfrac{1}{t} W(t) = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad t^3 y''(t) - 6ty(t) - t^2 y'(t) + 3ty(t) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad t^2 y''(t) - ty'(t) + 3y(t) = 0
\end{aligned}$$

car on peut diviser par $t > 0$. Cela montre que W est solution de (E_W) ssi y est solution de (E).

Là encore, il est indispensable de raisonner par équivalence, vous ne devez donc pas supposer que W est solution.

(b) Les solutions de (E_W) (équation homogène) sont les

$$t \mapsto \lambda e^{-(-\ln t)} = \lambda t \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc d'après la question précédente, puis en revenant à $(*)$, la définition de W, la fonction y est solution de (E) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $t \in I$,

$$W(t) = \lambda t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad t^3 y'(t) - 3t^2 y(t) = \lambda t$$

$$\text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{y'(t) - \frac{3}{t} y(t) = \frac{\lambda}{t^2}}$$

car on peut diviser par $t^2 > 0$.

On demande une condition nécessaire et suffisante donc, là encore, il faut travailler par équivalence. Résoudre l'équation, et affirmer que y est donc solution d'une équation avec un λ en précisant simplement que λ est réel ne répond pas à la question. En effet, y n'est pas solution, on vous demande de trouver une condition équivalente pour qu'une fonction soit solution de E

(c) Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$ et résolvons l'équation $(G_\lambda)\ :\ y'(t) - \frac{3}{t}y(t) = \frac{\lambda}{t^2}$.

- Les solutions de l'équation homogène $y'(t) - \frac{3}{t}y(t) = 0$ sont les $t \mapsto \mu e^{3\ln t} = \mu t^3$, pour $\mu \in \mathbb{R}$.
- Cherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire sous la forme $y : t \mapsto \mu(t)t^3$, avec $\mu : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable.
  Une telle fonction est solution de (G_λ) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
  $$\mu'(t)t^3 + 3t^2\mu(t) - \frac{3}{t}\mu(t)t^3 = \frac{\lambda}{t^2} \quad \iff \quad \mu'(t) = \frac{\lambda}{t^5}$$
  Donc par exemple, $\mu : t \mapsto -\frac{1}{4}\frac{\lambda}{t^4}$ convient, de sorte que $t \mapsto -\frac{\lambda}{4t}$ est une solution particulière.
- Conclusion : l'ensemble des solutions de (G_λ) est $\left\{t \mapsto \mu t^3 - \frac{\lambda}{4t}\ \mid\ \mu \in \mathbb{R}\right\}$.

Ce travail étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et en remarquant que lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$, le nombre $\frac{-\lambda}{4}$ parcourt lui aussi $\mathbb{R}$, on obtient l'ensemble des solutions de (E) :

$$\boxed{\left\{t \mapsto \mu t^3 + \frac{\lambda}{t}\ \mid\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Comme la solution était donnée, beaucoup ont essayé de justifier que ça marchait en écrivant n'importe quoi (et notamment en m'écrivant que $t \mapsto \dfrac{\lambda}{t}$ était aussi solution particulière. Certains ont bloqué sur le calcul de primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^5}$ qui ne pose pas de problème si on écrit $t \mapsto t^{-5}$.

Partie II - Wronskien

3. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors W_g est dérivable car somme de produits de fonctions dérivables, et on a
$$W_g' = f'g' + fg'' - f'g' - f''g = fg'' - f''g$$
Mais f étant solution de (E_0), on a :
$$f'' = -mf' - nf$$
si bien que
$$W_g' = fg'' - (-mf' - nf)\,g = fg'' + mf'g + nfg$$
D'où les équivalences :
$$\begin{aligned} W_g \text{ solution de } (E_W) \quad &\iff \quad W_g' + mW_g = 0 \\ &\iff \quad fg'' + mf'g + nfg + m\,(fg' - f'g) = 0 \\ &\iff \quad fg'' + mfg' + nfg = 0 \\ &\iff \quad g'' + mg' + ng = 0 \qquad (f \text{ ne s'annule jamais}) \\ &\iff \quad g \text{ solution de } (E_0) \end{aligned}$$

L'énoncé dit bien " on considère m et n deux fonctions continues", elles sont donc fixées! Vous n'avez donc pas le droit de poser n comme ça vous arrange pour retrouver le résultat de la question.

4. Pour toute fonction g dérivable sur I, on a :
$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - f'g}{f^2} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{W_g}{f^2}}$$

5. Pour résoudre l'équation (E_0), une fois que l'on connaît une solution f, on peut commencer par résoudre l'équation (E_W) pour obtenir la forme générale que W_g doit avoir pour que g soit solution de (E_0), à savoir les fonctions du type
$$t \mapsto \lambda e^{-M(t)} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } M \text{ est une primitive de } m.$$

Si $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable, on a alors les équivalences suivantes

$$\begin{array}{rcl} g \text{ solution de } (E_0) & \iff & W_g \text{ solution de } (E_W) \\ & \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } W_g = \lambda e^{-M} \\ & \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } f^2 \left(\frac{g}{f}\right)' = \lambda e^{-M} \\ & & \qquad \text{d'après la question précédente} \\ & \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left(\frac{g}{f}\right)' = \lambda \frac{e^{-M}}{f^2} \end{array}$$

Reste alors à déterminer les primitives des telles fonctions $\lambda \frac{e^{-M}}{f^2}$, et à multiplier par f pour obtenir la forme générale des solutions de (E_0).

Beaucoup de réponses confuses avec des "on détermine W_g" alors que W_g s'exprime à l'aide de g que l'on cherche...

6. Nous allons poursuivre les équivalences de la question précédente. Notons B une primitive sur I de la fonction $\frac{e^{-M}}{f^2}$ (n'importe laquelle), qui en admet bien puisqu'elle est continue. On a pour toute fonction $g : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} g \text{ solution de } (E_0) & \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left(\frac{g}{f}\right)' = \lambda \frac{e^{-M}}{f^2} \\ & \iff & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \frac{g}{f} = \lambda B + \mu \\ & \iff & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } g = \lambda f B + \mu f \end{array}$$

Si l'on pose la fonction $\boxed{f_1 := fB}$, le travail précédent montre bien que l'ensemble des solutions de (E_0) est : $\{\lambda f_1 + \mu f \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Les rôles de λ et μ étant interchangeables, on obtient bien l'ensemble voulu.

Montrons que f_1 n'est pas proportionnel à f. Par l'absurde, vu sa définition, si c'était le cas, cela signifierait que la fonction B est constante, c'est-à-dire de dérivée nulle sur I. Or, sa dérivée vaut $\frac{e^{-M}}{f^2}$, qui est non nulle, d'où contradiction. Donc f_1 n'est pas proportionnel à f.

Enfin, pour obtenir f_1, une méthode est donc :

- d'obtenir une primitive M de la fonction m ;
- puis d'obtenir une primitive B de la fonction $\frac{e^{-M}}{f^2}$;
- et enfin de poser $f_1 := f \times B$.

7. On se place sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\text{sh}(t)}$. f est deux fois dérivable sur I, et on a, pour tout $t \in I$,

$$f'(t) = -\frac{\text{ch}(t)}{\text{sh}^2(t)} \text{ et } f''(t) = \frac{-\text{sh}^3(t) + 2\text{ch}^2(t)\text{sh}(t)}{\text{sh}^4(t)} = \frac{2\text{ch}^2 t - \text{sh}^2(t)}{\text{sh}^3(t)}$$

Et donc pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} f''(t) + \frac{2\text{ch}(t)}{\text{sh}(t)} f'(t) + f(t) &= \frac{2\text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t)}{\text{sh}^3(t)} - \frac{2\text{ch}^2(t)}{\text{sh}^3(t)} + \frac{1}{\text{sh}(t)} \\ &= \frac{\text{sh}^2(t) - \text{sh}^2(t)}{\text{sh}^3(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Beaucoup d'erreurs dans les calculs de dérivée...

Donc f est bien une solution. De plus, f ne s'annule pas sur I. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente, en posant, pour tout $t \in I$, $m(t) = \frac{2\text{ch}(t)}{\text{sh}(t)}$ (et $n(t) = 1$). Calculons une fonction f_1 qui convient.

- Une primitive de la fonction m est $M : t \mapsto 2\ln(\text{sh}(t))$.
- Pour tout $t \in I$, $\frac{e^{-M(t)}}{f(t)^2} = \frac{\text{sh}^2(t)}{\text{sh}^2(t)} = 1$ (NB : $e^{-2\ln(x)} = x^{-2}$) donc une primitive B de la fonction $\frac{e^{-M}}{f^2}$ est $B : t \mapsto t$.

- On pose pour tout $t \in I$, $f_1(t) := f(t) \times B(t) = \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{t \mapsto \frac{\lambda t}{\mathrm{sh}(t)} + \frac{\mu}{\mathrm{sh}(t)} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

8. Il s'agit de montrer l'égalité des deux ensembles suivants :

$\mathcal{S}_1 := \left\{\lambda f + \mu f_1 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $\mathcal{S}_2 := \left\{\lambda f + \mu f_2 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

f_2 est solution de (E_0) donc d'après la question 6, $f_2 \in \mathcal{S}_1$, et donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\boxed{f_2 = \alpha f + \beta f_1}$$

On ne peut pas avoir $\beta = 0$, faute de quoi on aurait f_2 proportionnelle à f. D'où $\beta \neq 0$. La relation précédente peut donc être inversée :

$$\boxed{f_1 = -\frac{\alpha}{\beta} f + \frac{1}{\beta} f_2}$$

De là, on a $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$, car pour toute fonction $y \in \mathcal{S}_1$, il existe deux réels λ et μ tels que

$$y = \lambda f + \mu f_1 = \lambda f + \mu\left(-\frac{\alpha}{\beta} f + \frac{1}{\beta} f_2\right) = \left(\lambda - \frac{\mu\alpha}{\beta}\right) f + \left(\frac{\mu}{\beta}\right) f_2$$

d'où $y \in \mathcal{S}_2$.
Mais on a de même $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$, car pour toute fonction $y \in \mathcal{S}_2$, il existe deux réels λ et μ tels que

$$y = \lambda f + \mu f_2 = \lambda f + \mu\left(\alpha f + \beta f_1\right) = \left(\lambda + \mu\alpha\right) f + \left(\mu\beta\right) f_1$$

d'où $y \in \mathcal{S}_1$.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2}$ par double inclusion.

Le peu d'élèves ayant abordé cette question ont seulement montré une inclusion en justifiant que $\lambda f + \mu f_2$ était solution.

Partie III - Résolution complète de l'équation d'Euler

9. Soit $y : t \mapsto t^r$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*, y'(t) = rt^{r-1}$ et $y''(t) = r(r-1)t^{r-2}$. Et donc ,

$$\begin{array}{ll} & y \text{ est solution de } (E_{a,b}) \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, t^2 r(r-1)t^{r-2} + tart^{r-1} + bt^r = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, (r(r-1) + ar + b)t^r = 0 \\ \Leftrightarrow & \qquad r^2 + (a-1)r + b = 0 \end{array}$$

donc si et seulement si r est racine de P.

10. Premier cas : nous sommes exactement dans le cadre de la partie II car notre équation s'écrit, sur $\mathbb{R}_+^*$, et après normalisation

$$y''(t) + \frac{a}{t} y'(t) + \frac{b}{t^2} y(t) = 0$$

On peut alors appliquer le résultat de la question 8, avec les fonctions $f : t \mapsto t^{r_1}$ (solution qui ne s'annule pas) et $f_2 : t \mapsto t^{r_2}$ (solution non proportionnelle à f, car leur quotient n'est pas constant).
L'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\boxed{\left\{t \mapsto \lambda t^{r_1} + \mu t^{r_2} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Beaucoup m'ont balancé la réponse sans aucune justification. L'énoncé demande d'utiliser la partie II et pas la partie I, vous n'avez aucun résultat de cours vous permettant d'affirmer que l'ensemble des solutions est celui-ci (on a travaillé pour arriver à cette conclusion en partie I), il faut donc justifier que l'on peut appliquer la partie II dans un cas particulier pour retrouver le résultat de la partie I.

11. Deuxième cas : r est racine double de P, donc $P = (X-r)^2 = X^2 - 2rX + r^2$ donc par identification du coefficient en X, on a $-2r = a - 1$, d'où $\boxed{a + 2r = 1}$.

Pour résoudre $(E_{a,b})$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le résultat de la question 6, en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $m(t) = \frac{a}{t}$ (et $n(t) = \frac{b}{t^2}$) et $f(t) = t^r$. Calculons une fonction f_1 qui convient.

- Une primitive de la fonction m est $M \ : t \mapsto a\ln(t)$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{e^{-M(t)}}{f(t)^2} = \frac{t^{-a}}{t^{2r}} = \frac{1}{t^{a+2r}} = \frac{1}{t}$ donc une primitive B de la fonction $\frac{e^{-M}}{f^2}$ est $B \ : t \mapsto \ln(t)$.
- On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_1(t) := f(t) \times B(t) = t^r \ln(t)$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\boxed{\left\{t \mapsto t^r(\lambda + \mu \ln t) \ \mid \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

12. Troisième cas.

(a) On a pour tout $t > 0, y_\lambda(t) = e^{\lambda \ln t}$. La fonction y_λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de fonctions qui le sont, et pour tout $t > 0$:

$$y'_\lambda(t) = \frac{\lambda}{t} e^{\lambda \ln t} = \lambda e^{(\lambda-1)\ln t} = \lambda t^{\lambda-1}$$

On constate que y'_λ est elle-même dérivable, et :

$$y''_\lambda(t) = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$$

(b) Comme précédemment, on a donc y_λ solution de $(E_{a,b})$ si et seulement si λ est une racine (complexe) de P, donc $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\lambda = \alpha - i\beta$ conviennent (et sont distinctes car $\beta \neq 0$, il s'agit de nombres non-réels).

Par le résultat de la question 6 appliqué au cas des fonctions à valeurs complexes, l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ à valeurs complexes est

$$\boxed{\left\{t \mapsto \lambda t^{\alpha+i\beta} + \mu t^{\alpha-i\beta} \ \mid \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}}$$

De là, l'équation $(E_{a,b})$ étant à coefficients réels, les solutions réelles sont les parties réelles des solutions complexes, c'est-à-dire les fonctions qui à t associent

$$\mathrm{Re}\left(\lambda t^{\alpha+i\beta} + \mu t^{\alpha-i\beta}\right)$$

Or, $t^{\alpha+i\beta} = t^\alpha e^{i\beta \ln t} = \underbrace{t^\alpha}_{\in\mathbb{R}}(\cos(\beta \ln t) + i\sin(\beta \ln t))$, et donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left(\lambda t^{\alpha+i\beta} + \mu t^{\alpha-i\beta}\right) \\
&= t^\alpha(\mathrm{Re}(\lambda)\cos(\beta \ln t) - \mathrm{Im}(\lambda)\sin(\beta \ln t) \\
&\qquad + \mathrm{Re}(\mu)\cos(\beta \ln t) + \mathrm{Im}(\mu)\sin(\beta \ln t)) \\
&= t^\alpha((\mathrm{Re}(\lambda) + \mathrm{Re}(\mu))\cos(\beta \ln t) + (\mathrm{Im}(\mu) - \mathrm{Im}(\lambda))\sin(\beta \ln t))
\end{aligned}$$

Donc toute solution réelle est de la forme $t \mapsto C_1 t^\alpha \cos(\beta \ln t) + C_2 t^\alpha \sin(\beta \ln t)$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$, et inversement, toute fonction de cette forme est solution, car il suffit de choisir $\lambda := C_1$ et $\mu := iC_2$ pour tomber sur la bonne fonction.
Conclusion : l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ à valeurs réelles est :

$$\boxed{\left\{t \mapsto C_1 t^\alpha \cos(\beta \ln t) + C_2 t^\alpha \sin(\beta \ln t) \ \mid \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$