Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 5

Devoir d'entrainement 5.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1 (sujet 1)**.**
Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par:

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. Une première méthode pour le calcul des puissances de M.
   Considérons la matrice A définie par: $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.
   (a) Calculer A puis A^2.
   (b) Montrer que pour tout entier n appartenant à $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_n tel que: $M^n = I_3 + u_n A$.
   (c) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que: $M^n = I_3 + u_n A$.
   (d) i. Déterminer pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.
       ii. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.
2. Une seconde méthode de calcul des puissances de M.
   On pose:
   $$J = \frac{1}{4}(M + 3I_3).$$
   (a) Calculer J^2, puis pour tout entier naturel non nul n, J^n.
   (b) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une expression de M^n en fonction de n, I_3 et J.
   (c) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

3. Une troisième méthode de calcul des puissances de M.

   (a) On pose:
$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

   (b) On pose:
$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Donner pour tout entier naturel n, l'expression de D^n.

   (c) On admet que $P^{-1}MP = D$, exprimer pour tout entier n, M^n en fonction de D^n, P et P^{-1}.

   (d) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

Exercice 2 (sujet 2)**.**
Si n est un entier naturel, on note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On note $m_{i,j}$ le coefficient sur la ligne i et la colonne j d'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$.
On note Id la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

On appelle matrice semi-magique d'ordre n, une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel, noté $\sigma(M)$ vérifiant:
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M),\ \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M).$$
On note SM_n l'ensemble des matrices semi-magiques d'ordre n.
On appelle matrice magique d'ordre n, une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes: M est semi-magique et:
$$\sigma(M) = \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \text{ et } \sigma(M) = \sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i+j=n+1} m_{i,j}.$$
On note MG_n l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.

1. Montrer que : "M est semi-magique" $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $MV = \lambda V = M^\top V$ où $V = (1\ 1\ \dots\ 1)^\top$
2. (a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(M,N) \in SM_n^2$ (respectivement MG_n^2) $\Rightarrow \alpha M + \beta N \in SM_n$ (resp. MG_n).

   (b) Montrer que si M et N sont des matrices semi-magiques d'ordre n alors MN est semi-magique.
3. On désigne par E la matrice à coefficients réels telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $e_{i,j} = 1$.

   (a) Montrer que E est magique.

   (b) Montrer que $\forall p \geqslant 1$, $E^p = n^{p-1}E$.
4. Montrer que pour toute matrice semi-magique M de $M_n(\mathbb{R})$, on a $EM = \sigma(M)E = ME$.

5. Dans cette question, on impose $n = 3$.
On se propose de montrer que si M est magique de MG_3, alors pour tout entier p impair, M^p est magique.

   (a) Soit M une matrice magique de trace nulle.
   On admettra le résultat suivant qu'on ne demande pas de démontrer: il existe un polynôme P du troisième degré $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ tel que $P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = (0)$. Et de plus, le réel a est égal à $-Tr(M)$.

      i. Montrer que l'hypothèse $c \neq 0$ entraîne que M est inversible.
      ii. Montrer alors que la relation démontrée en 4. conduit à une contradiction.
      iii. En déduire l'existence d'un réel λ tel que $M^3 = \lambda M$.
      iv. Montrer que pour tout entier p impair, M^p est magique.

   (b) Soit M une matrice magique de MG_3. On pose $M_0 = M - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(M)E$.

      i. Calculer M^p.
      ii. Montrer que pour tout entier impair M^p est magique.

6. Dans cette question, on impose $n = 4$ et on considère la matrice magique d'ordre 4 de MG_4,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier que $A^2 = A + 2Id$.
   (b) Montrer qu'il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que $A^p = a_p A + b_p Id$.
   (c) Démontrer que pour tout $p \geqslant 2$, A^p ne peut pas être magique.

Exercice 3.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par: $\forall x \in [0,1], f(x) = (x-1)^2$. On pose $g = fof$.

   (a) Dresser le tableau de variation de f.

   (b) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0,1]$ que l'on notera α.

   (c) Dresser le tableaux de variations de g sur $\mathbb{R}$.

   (d) Déterminer les points fixes de g.

   (e) En déduire le signe de $g(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.

   Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par: $\begin{cases} u_0 = a, \text{ et} \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

2. On suppose tout d'abord $a \in [0, \alpha[$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis w_n en fonction de v_n.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, \alpha[$.

   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et déterminer sa limite.

   (d) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

   (e) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente?

3. Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 \in]\alpha, 1]$?

4. (a) Montrer qu'il existe $a_1 < 0$ et $a_2 > 2$ tels que $g(a_1) = g(a_2) = 1$.

   (b) Montrer que l'on connaît la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 \in [a_1, a_2]$.

5. On suppose ici $u_0 \in [0, \alpha[$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_n = \dfrac{\ln(4v_n)}{2^n}$.

   (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a:

   $$v_{n+1} = v_n^2(2 - v_n)^2 \text{ et } x_{n+1} - x_n = \frac{\ln(1 - \frac{v_n}{2})}{2^n}$$

   (b) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n < p$. Démontrer l'inégalité suivante: $\dfrac{\ln(1 - \frac{v_n}{2})}{2^{n-1}} \leqslant x_p - x_n \leqslant 0$.

   (c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L strictement négatif.

   (d) Démontrer que $x_n = L + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$

   (e) En déduire un équivalent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction du DS n 5d'entrainement

Exercice 1 On pose: $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On pose: $A = \frac{1}{4} \times (M - I_3)$.

   (a) On a donc:
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
   puis:
$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -A. \end{aligned}$$
   On a $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^2 = -A$.

   Faites bien apparaître que $A^2 = -A$ (surtout si vous comptez l'utiliser ensuite)

   (b) De $A = \frac{1}{4} \times (M - I_3)$, on déduit:
   $M = 4A + I_3$.
   Posons $u_0 = 0$, $u_1 = 4$ et $u_2 = -8$. On a:
$$\begin{aligned} M^0 &= I_3 \\ &= I_3 + 0 \times A \\ &= I_3 + u_0 \times A \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} M^1 &= M \\ &= 4A + I_3 \\ &= I_3 + u_1 \times A \\ M^2 &= (4A + I_3)^2 \\ &= 16A^2 + I_3^2 + 8A \text{ par la formule du binôme de Newton} \\ &\text{invoquable car } I_3 \text{ et } 4A \text{ commutent} \\ &= -16A + I_3 + 8A \\ &= -8A + I_3 \\ &= I_3 + u_2 \times A \end{aligned}$$
   On peut donc conclure:
   Pour tout k dans $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_k tel que $M^k = I_3 + u_k A$.

(c) Pour tout k entier naturel, on appelle $\mathcal{P}_k$ la proposition :

$$\mathcal{P}_k : \text{ "Il existe un réel } u_k \text{ tel que } M^k = I_3 + u_k A \text{ "}$$

On a déjà vu que $\mathcal{P}_0$ était vraie. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain entier naturel k, montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est alors vraie. On a: $M^{k+1} = M \cdot M^k$. Or, d'après $\mathcal{P}_k$, il existe u_k tel que $M^k = I_3 + u_k A$ d'où:

$$\begin{aligned}
M^{k+1} &= M + u_k A \times M \\
&= M + u_k A \times (4A + I_3) \text{ car on a vu que } M = 4A + I_3. \\
&= 4A + I_3 + 4u_k A^2 + u_k A \\
&= 4A + I_3 - 4u_k A + u_k A \text{ car on a vu que } A^2 = -A. \\
&= (-3u_k + 4)A + I_3 \\
&= u_{k+1} A + I_3
\end{aligned}$$

en posant $u_{k+1} = -3u_k + 4$. $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie si $\mathcal{P}_k$ l'est.
$\mathcal{P}_0$ est vraie et pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k$ implique $\mathcal{P}_{k+1}$. $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout entier naturel k d'après le principe de récurrence. On définit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par:

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = -3u_k + 4.$$

On peut d'après notre récurrence affirmer que:
Pour tout entier naturel k, on a: $M^k = I_3 + u_k A$.

(d) i. On pose $c = \dfrac{4}{1-(-3)} = 1$. On sait que la suite $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -3. On a donc, pour tout entier naturel n: $u_n - 1 = (-3)^n(u_0 - 1)$. Or $u_0 = 0$. On a donc:
Pour tout entier naturel n, $u_n - 1 = -(-3)^n$. On en déduit:
Pour tout entier naturel n, $u_n = -(-3)^n + 1$.

Calculer l'expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique est qqch que vous devez savoir faire.

ii. Or, on a vu que, pour tout entier naturel n, $M^n = I_3 + u_n A$. On en déduit que, pour tout entier naturel n, on a:

$$\begin{aligned}
M^n &= I_3 + (-(-3)^n + 1)A \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-(-3)^n + 1) \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 2(-(-3)^n + 1) & 0 & -2(-(-3)^n + 1) \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & (-(-3)^n + 1) + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 + 2 \times (-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n + 1) \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2 \times (-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n + 1) \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}$.

Quand on dit "écriture matricielle", on attend une matrice (écrit comme ça, vous allez dire que j'ai craqué mais je vous promets qu'un nombre certain d'entre vous n'ont PAS écrit la matrice

2. (a) Pour toute matrice J de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a:

$$\begin{aligned} M = 4J - 3I_3 &\Longleftrightarrow J = \frac{1}{4} \times (M + 3I_3) \\ &\Longleftrightarrow J = \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La seule matrice J de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = 4J - 3I_3$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) On a:

$$\begin{aligned} J^2 &= J \times J \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= J. \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate sur n, on en déduit que : pour tout entier naturel n non nul, on a donc: $J^n = J$.

(c) Soit n un entier naturel non nul. Les matrices $-3I_3$ et $4J$ commutent donc, par la formule du binôme de Newton, on obtient:

$$\begin{aligned} M^n &= (4J + (-3I_3))^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (4J)^i (-3I_3)^{n-i} \\ &= \binom{n}{0} (4J)^0 (-3I_3)^{n-0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i J^i (-3)^{n-i} I_3 \\ &= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} \right) J \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a donc: $M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} \right) J$.

(d) D'après la formule du binôme de Newton, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} &= -\binom{n}{0} 4^0 (-3)^{n-0} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} \\ &= -(-3)^n + (4-3)^n \\ &= -(-3)^n + 1 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a donc: $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} = 1 - (-3)^n$.

De $M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i}\right) J$ et $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} = 1-(-3)^n$, on en déduit:

$$\begin{aligned}
M^n &= (-3)^n I_3 + (1-(-3)^n)\, J \\
&= \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} + (1-(-3)^n) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3)^n - 1 + (-3)^n & 0 & -2(1-(-3)^n) \\ 1-(-3)^n & (-3)^n + 1 - (-3)^n & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2(-(-3)^n+1)-(-3)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+2\times(-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n+1) \\ -(-3)^n+1 & 1 & -(-3)^n+1 \\ -(-3)^n+1 & 0 & -(-3)^n+2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a donc: $M^n = (-3)^n I_3 + (-(-3)^n+1)\, J$.

(e) La formule montrée à la question précédente reste vraie pour $n=0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} -1+2\times(-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n+1) \\ -(-3)^n+1 & 1 & -(-3)^n+1 \\ -(-3)^n+1 & 0 & -(-3)^n+2 \end{pmatrix}.$$

Attention, dans cette question comme dans la suivante, on ne peut pas utiliser les résultats de la question 1 étant donné qu'on cherche à calculer M^n par trois méthodes différentes.

3. (a) On étudie le système associe:

$$\begin{cases} -2x+z &= a \\ x+y &= b \\ x-z &= c \end{cases}$$

On montre qu'il possède une unique solution

$$\begin{cases} x &= -a-c \\ y &= a+b+c \\ z &= -a-2c \end{cases}$$

On en déduit que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) On a, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La puissance d'une matrice diagonale est un résultat du cours, inutile donc de le démontrer (surtout par une récurrence sur une page!)

(c) On a $M = PDP^{-1}$ donc $M^2 = PD^2P^{-1}$ et, par une récurrence immédiate, $M^n = PD^nP^{-1}$.

(d) Pour tout entier naturel n, on a donc en utilisant les différentes questions précédentes:

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(-3)^n & 0 & 1 \\ (-3)^n & 1 & 0 \\ (-3)^n & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1+2\times(-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n+1) \\ -(-3)^n+1 & 1 & -(-3)^n+1 \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2 1. On suppose tout d'abord M semi-magique. On a alors $M.V = \sigma(M)\, V$ et ${}^tM.V = \sigma(M)\, V$ d'où le résultat souhaité avec $\lambda = \sigma(M)$. Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $MV = \lambda V$, on a alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \lambda.$$

De même, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M^\top V = \lambda V$, on a alors

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \lambda.$$

On en déduit que M est semi-magique et $\sigma(M) = \lambda$. Ceux qui n'ont pas raisonné par double implication n'ont montré qu'un sens.

2. (a) Soit M, N deux matrices semi-magiques, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ deux réels. Alors, d'après la question précédente, $(\alpha M + \beta N)\, V = \alpha MV + \beta NV = \alpha\sigma(M)V + \beta\sigma(N)V = (\alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N))V$. De même,

$$(\alpha M + \beta N)^\top V = (\alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N))\, V.$$

Par la réciproque de la question réciproque, on a $\alpha M + \beta N$ semi-magique.

Si on suppose, de plus, M et N magiques, il reste à vérifier que la trace et la somme de l'anti-diagonale sont bien égales à $\alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N)$ ce qui est clair par linéarité de la somme.

(b) Soit M et N des matrices semi-magiques d'ordre n. On a donc $MV = \sigma(M)V$ et $NV = \sigma(N)V$, on en déduit que $MMV = \sigma(M)\sigma(N)V$ et de même pour la transposée. Ainsi, d'après la première question, on en déduit que MN est semi-magique.

On peut aussi le faire en explicitant le produit: $MN = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj}$. Alors pour tout j,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} &= \sum_{i=n}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{ik} \right) n_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sigma(M) n_{kj} \\ &= \sigma(M) \sum_{k=1}^{n} n_{kj} \\ &= \sigma(M)\sigma(N). \end{aligned}$$

De même, pour tout i, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sigma(M)\sigma(N)$.

3. On désigne par E la matrice à coefficients réels telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $e_{i,j} = 1$.

   (a) La matrice E est magique avec $\sigma(E) = n$. C'est clair pour la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne donnée mais également pour la diagonale et la diagonale inverse.

   (b) On a $E^2 = nE$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall p \geqslant 1$, $E^p = n^{p-1}E$. En raisonnant par récurrence et en initialisant à $n = 1$, on avait du mal à montrer l'hérédité sans avoir au préalable calculé E^2. Certains m'ont dit que $E^2 = nE$ découlait de l'hypothèse de récurrence ce qui est faux (à moins de faire par récurrence forte ce que personne n'a fait). D'autres ont calculé E^2 au milieu de l'hérédité. J'ai vu alors des matrices égales à des réels dans certaines copies...

4. Soit M une matrice semi-magique de $M_n(\mathbb{R})$, alors le coefficient d'indice (i, j) de EM est égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ik}e_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sigma(M) = \sigma(M)e_{ij}$. On a donc bien $ME = \sigma(M)E$. On calcule de même ME.

5. Dans cette question, on impose $n = 3$.

   (a) Soit M une matrice magique de trace nulle.
   On admettra le résultat suivant qu'on ne demande pas de démontrer: il existe un polynôme P du troisième degré $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ tel que $P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = (0)$. Et de plus, le réel a est égal à $-Tr(M)$.

      i. On a $P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = 0$ et ici : $a = 0$
      Si $c = 0$: $P(M)$ s'écrit : $\dfrac{-1}{c}M(M^2 + bId) = Id$ donc M est inversible et :
      $$M^{-1} = \frac{-1}{c}(M^2 + bId)$$

      ii. On a supposé $\sigma(M) = \mathrm{Tr}(M) = 0$ donc $EM = ME = (0)$. Si M est inversible, cela implique $E = (0)$ ce qui n'est pas le cas. On a donc une contradiction.

      iii. Si M est de trace nulle, on a $c = 0$, il ne reste donc que $M^3 + bM = (0)$ d'où l'existence d'un réel $\lambda = -b$ tel que $M^3 = \lambda M$.

      iv. On pose $p = 2q + 1$ et on raisonne par récurrence sur q. On obtient
      $$M^{2q+1} = \lambda^q M,$$
      ce qui montre que pour tout entier p impair, M^p est magique.

   (b) Soit M une matrice magique de MG_3. On pose $M_0 = M - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(M)E$. M_0 est donc magique de trace nulle.

      i. D'après 4 M commute avec E. On en déduit que M_0 commute avec E, on peut donc utiliser la formule du binôme.
      $$M^p = M_0^p + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{1}{3}Tr(M)\right)^k M_0^{p-k}E^k$$
      $$\text{Or : } M_0E = \sigma(M_0)E = (0) \text{ donc } \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \left(\frac{1}{3}Tr(M)\right)^k M_0^{p-k}E^k = (0)$$

On a donc

$$M^p = M_0^p + \left(\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(M)\right)^p 3^{p-1} E$$

$$M^p = M_0^p + \frac{1}{3}\left(\mathrm{Tr}(M)\right)^p E$$

ii. Si p est impair M_0^p est une matrice magique donc M est aussi magique comme combinaison linéaire de matrices magiques.

6. Dans cette question, on impose $n = 4$ et on considère la matrice magique d'ordre 4 de MG_4,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) On pose le produit matriciel, on a bien $A^2 = A + 2Id$.

(b) On a

$$a_0 = 0 \qquad b_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_1 = 1 \qquad b_1 = 0$$

Par récurrence : si $A^p = a_pA + b_pB$ alors :
$A^{p+1} = a_pA^2 + b_pA = (a_p + b_p)A + 2\,a_pI$ on a donc

$$\begin{cases} a_{p+1} & = a_p + b_p \\ b_{p+1} & = 2a_p \end{cases}$$

(c) Pour $p \geqslant 2$ on remarque que $b_p > 0$.
Donc pour $p \geqslant 2$, si A^p était magique alors $A^p - a_pA$ le serait aussi, ce qui implique (comme $b_p \neq 0$) que I serait aussi une matrice magique, ce qui est faux. On en déduit que A^p n'est pas magique pour $p \geqslant 2$.
Certains m'ont calculé la trace $2a_p + 4b_p$ et la somme des coefficients de la diagonale inversée qui vaut $2a_p$. Si A^p était magique, on aurait alors $b_p = 0$ ce qui est faux, à partir de $p = 2$.

Exercice 3 1. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ la fonction définie par: $\forall x \in [0,1], f(x) = (x-1)^2$. On pose $g = fof$.*

(a) *Dresser le tableau de variation de f sur* $\mathbb{R}$
La fonction f est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = 2(x-1)$ donc f est décroissante sur $[0,1]$. On a

x	0	1
$f'(x)$	$-$	
f	$1 \searrow$	0

(b) *Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0,1]$. On le notera α*
On a $f(x) - x = x^2 - 3x + 1$, c'est un polynôme de degré 2, de coefficient dominant positif et admettant pour racines $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. On a $0 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Attention, certains m'ont parlé d'injectivité de f pour justifier l'existence ou l'unicité de point fixe, cela n'a pas de sens! Une fonction injective peut (ou pas) admettre un ou plusieurs points fixes

(c) *Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$*
On a $g(x) = (x(x-2))^2$ donc $g'(x) = 2(2x-2)x(x-2) = 4x(x-1)(x-2)$. On en déduit que

x	$-\infty$		0	α	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$ α $\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

L'erreur classique a été de me donner le tableau de variations sur $[0,1]$ et pas sur $\mathbb{R}$. J'en ai vu quelques uns échouer à me trouver le signe de la dérivée (pourquoi avoir développé?!?!). Pensez à toujours regarder si 0, 1 ou -1 sont racines d'un polynôme lorsque vous cherchez à le factoriser.

(d) *Déterminer les points fixes de g* On a $g(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0 \Leftrightarrow = x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = 0$ et comme les points fixes de f sont points fixes de g, on sait que $x^2 - 3x + 1$ divise g donc $g(x) = x(x-1)(x^2 - 3x + 1)$.
On pouvait aussi remarquer que 0 et 1 sont racines évidentes du polynôme $g(x) - x$ et retrouver ainsi la factorisation. Les points fixes de g sont $0, 1, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(e) *En déduire le signe de $g(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.*

On a
$$g(x) - x = x(x-2)(x^2 - 3x + 1) = x(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha')$$
avec $\alpha' = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		α		1		α'		$+\infty$
$g(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit $a \in [0,1]$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par: $u_0 = a \in]0, \alpha[$ et $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

2. *On suppose tout d'abord $a \in [0, \alpha[$.*

(a) *Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis w_n en fonction de v_n.*

On a
$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) = g(u_{2n}) = g(v_n)$$
et
$$w_n = u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(v_n)$$
Beaucoup d'erreurs sur cette question. Impossible de faire correctement le reste si on n'a pas vu que g va être la fonction qui définit v. Pour info, la réponse était donnée question 5a)

(b) *Montrer que* $v_n \in [0, \alpha[, \forall n \in \mathbb{N}$.

On remarque, d'après le tableau de variations de g, que $[0, \alpha[$ est un intervalle stable par g. On a $v_0 = u_0 \in]0, \alpha[$ par hypothèse, on suppose donc que v_n appartient à cet intervalle; alors $v_{n+1} = g(v_n)$ et comme $v_n \in]0, \alpha[$ par hypothèse de récurrence, on sait que $g(v_n) \in]0, \alpha[$. Ainsi, on a montré le résultat par récurrence.

J'ai accepté ceux qui m'ont dit $u_0 \in [0, \alpha[$ et $[0, \alpha[$ est stable par g donc car la récurrence est immédiate..

(c) *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et déterminer sa limite.*

On utilise maintenant la question **??**. On sait que $v_n \in]0, \alpha[$ pour tout n et $x \mapsto g(x) - x$ est négative sur $]0, \alpha[$ donc $v_{n+1} = g(v_n) < v_n$ et la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée puisque son support est inclus dans $[0, \alpha[$, elle est donc convergente. De plus, comme elle est décroissante, sa limite ℓ ne peut être égale à α donc $\ell \in [0, \alpha[$. On sait que $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ or $v_{n+1} = g(v_n)$ donc, par continuité de g, on a également $v_{n+1} \to g(\ell)$. Par unicité de la limite, on a $g(\ell) = \ell$ et comme $g(x) < x, \forall x \in]0, \alpha[$, on a nécessairement $\ell = 0$.

Attention, certains m'ont dit $v_n \in [0, \alpha[$ donc sa limite appartient à $[0, \alpha[$ ce qui est faux, en général. Si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, \alpha[$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n \in [0, \alpha]$.

(d) *En déduire que la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et calculer sa limite.*

On a remarqué que $w_n = f(v_n)$ et f est continue donc $w_n \to f(l) = f(0) = 1$. Il était inutile de montrer que (w_n) converge.

(e) *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est-elle convergente?*

Les suites (v_n) et (w_n) sont deux suites extraites de (u_n) et elles convergent vers des limites différentes, la suite (u_n) ne peut donc pas être convergente.

Inutile de me dire que les indices des deux suites recouvrent les entiers! J'aurais la divergence de (u_n) même si ce n'était pas le cas.

3. *Quelle est la nature de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si* $u_0 \in]\alpha, 1]$?

Si $u_0 \in]\alpha, 1]$, alors $u_1 \in [0, \alpha[$ donc, d'après l'étude précédente, on a (u_n) divergente. Seule Clara F. a remarqué qu'il était inutile de refaire toute l'étude.

4. (a) *Montrer qu'il existe* $a_1 < 0$ *et* $a_2 > 2$ *tels que* $g(a_1) = g(a_2) = 1$.

On a $g(\mathbb{R}_-^\star) = \mathbb{R}_+^\star$ donc 1 admet un antécédent a_1 par g dans $]-\infty, 0[$. De même $g(]2, +\infty[) =]0, +\infty[$ donc il existe un antécédent $a_2 \in]2, +\infty[$ de 1 par g.

(b) *Montrer que l'on connaît la nature de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque* $u_0 \in [a_1, a_2]$.

Si $u_0 \in [a_1, a_2]$, alors $g(u_0) = u_2 \in [0, 1]$. On sait que $(u_n) \in$ diverge si $u_0 \in [0, 1]$ et $u_0 \neq \alpha$. Ce sera donc le cas chaque fois que $u_2 \in [0, 1]$, $u_2 \neq \alpha$. Pour $u_2 = \alpha$, la suite est constante à partir du rang 2, elle est donc convergente.

5. *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $x_n = \dfrac{\ln(4v_n)}{2^n}$.

(a) *Montrer que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *on a:* $v_{n+1} = v_n^2(2 - v_n)^2$, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\ln(1 - \frac{v_n}{2})}{2^n}$.

On a déjà montré que $v_{n+1} = g(v_n) = v_n^2(2 - v_n)^2$. Par ailleurs, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln(4v_{n+1}) - \dfrac{1}{2^n} \ln(4v_n) = \dfrac{1}{2^n} \ln\left(\dfrac{\sqrt{4v_{n+1}}}{2v_n}\right) = \dfrac{1}{2^n} \ln\left(\dfrac{2v_n(2 - v_n)}{2v_n}\right) = \dfrac{1}{2^n} \ln\left(1 - \dfrac{v_n}{2}\right)$

(b) *Soit* $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n < p$. *Démontrer l'inégalité suivante:* $\dfrac{\ln(1 - \frac{v_n}{2})}{2^{n-1}} \leqslant x_p - x_n \leqslant 0$.

On remarque tout d'abord que $x_p - x_n = \sum_{k=n}^{p-1} x_{k+1} - x_k = \sum_{k=n}^{p-1} \frac{\ln\left(1-\frac{v_k}{2}\right)}{2^k}$. Comme $v_k > 0$, tous les termes de la somme sont strictement négatifs donc $x_p - x_n < 0$. De plus, ln est croissante et (v_n) décroissante donc $\ln\left(1-\frac{v_k}{2}\right) > \ln\left(1-\frac{v_n}{2}\right)$, $\forall k = n \dots p-1$ d'où

$$x_p - x_n > \sum_{k=n}^{p-1} \frac{\ln(\left(1-\frac{v_n}{2}\right)}{2^k} = \ln(\left(1-\frac{v_n}{2}\right) \sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^k}$$

On explicite maintenant la suite géométrique $\sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}\frac{1-(1/2)^{p-n}}{1-1/2} = \frac{1-(1/2)^{p-n}}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$. Enfin, on n'oublie pas que le ln est négatif donc la multiplication inverse les inégalités et on se retrouve avec $x_p - x_n > \frac{\ln(1-v_n/2)}{2^{n-1}}$.

On ne va pas se mentir, c'était un massacre.

(c) *En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L strictement négatif.*

La question précédente, appliquée à $p = n+1$ montre que (x_n) est décroissante. De plus, en l'appliquant à $n = 0$ et $p > 0$, on en déduit que $2\ln\left(1-\frac{v_0}{2}\right) < x_p - x_0$ donc $x_0 + 2\ln\left(1-\frac{v_0}{2}\right) < x_p$ et la suite est minorée donc convergente. On a vu que la suite (v_n) tend vers 0, donc, à partir d'un certain rang, elle est strictement inférieure à 1 ce qui implique que $x_n < 0$ à partir d'un certain rang. Comme (x_n) est, de plus, décroissante, sa limite ne peut être que strictement négative.

(d) *Démontrer que $x_n = L + o(\frac{1}{2^n})$ et en déduire un équivalent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

On revient à l'inégalité trouvée à la question a). On a la réécrit sous la forme

$$2\ln\left(1-\frac{v_n}{2}\right) < 2^n(x_p - x_n) < 0$$

On fixe n et on fait tendre p vers $+\infty$. On obtient alors $2\ln\left(1-\frac{v_n}{2}\right) < 2^n(L - x_n) < 0$ On peut maintenant faire tendre n vers $+\infty$ et par le théorème des gendarmes, on a $2^n(L - x_n) \to 0$ ce qui est équivalent à $x_n = L + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

(e) Comme $v_n = \frac{1}{4}e^{2^n x_n}$, on a $v_n = \frac{1}{4}e^{2^n L + o(1)} = \frac{e^{2^n L}}{4}.e^{o(1)} \sim \frac{e^{2^n L}}{4}$.

Attention, j'ai vu des $a \sim b$ implique $e^a \sim e^b$!!!!