# TD 12: Dérivation.

## 1 Étude de la dérivabilité

**Exercice 1.**
Soit $f$ définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch} x - 1}{x}$ et $f(0) = 0$, $f$ est-elle dérivable?

**Exercice 2.**
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0. le prolongement obtenu est-il de classe $\mathcal{C}^1$?

**Exercice 3.**
Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ et le caractère $C^1$ si elle est dérivable de

1. $f : x \mapsto x|x|$
2. $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.

**Exercice 4.**
Étudier la dérivabilité de $f$ définie par $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$;

**Exercice 5.**
Que dire de la dérivée d'une fonction paire? impaire?

**Exercice 6.**
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 7.**
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - x^2 e^x \end{array} \right.$.

1. Montrer que la corestriction de $f$: $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & ]-\infty, 1] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est bijective.
2. Sur quel(s) intervalle(s) $g^{-1}$ est-elle dérivable?
3. Déterminez $(g^{-1})'(1-e)$.

**Exercice 8.**
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit une fonction $g$ sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(2x) \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) \text{ sinon} \end{array} \right.$$

A quelle(s) condition(s) la fonction $g$ est-elle dérivable?

**Exercice 9.**
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array} \right.$. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0.
Son prolongement est-il dérivable?

## 2 Résolution d'équation fonctionnelle

**Exercice 10.**
Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(x) = 0$. Montrer que $f'$ est identiquement nulle.

**Exercice 11.**
Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, telle que

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

## 3 Théorème de Rolle

**Exercice 12.**
Soit $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$. Montrer que $\varphi'$ s'annule.

**Exercice 13.**
Soit $f : [-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ dérivable tel que $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $f'$ s'annule.

**Exercice 14.**
Soit $g$ deux fois dérivable sur $[0,3]$ telle que $g(0) = g(3) = 0$ et $g(1)g(2) < 0$. Montrer que $g$" s'annule.

## 4 Théorème des accroissements finis

**Exercice 15.**
Démontrer que pour tout $x$ et $y$ réels on a : $|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x - y|$

**Exercice 16.**
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

**Exercice 17.**
Déterminer

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}\right).$$

**Exercice 18.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que $f(2x) = 2xf'(c)$.

**Exercice 19.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

**Exercice 20.**
Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f" \leqslant 0$. Montrer que $f$ est positive.

## 5 Dérivées d'ordre supérieur

**Exercice 21.**
Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur leur ensemble de définition et déterminer leur dérivée $n$-ème:

1. $f_1 : x \mapsto xe^{-x}$
2. $f_2 : x \mapsto x^2e^x$
3. $f_3 : x \mapsto (ax+b)^k$, avec $k \in \mathbb{N}$.
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$.
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{ax+b}$.

**Exercice 22.**
Montrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geqslant 2$:

$$\left(1+x^2\right)\arctan^{(n)}(x) + 2(n-1)x\arctan^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)\arctan^{(n-2)}(x) = 0.$$

En déduire la valeur de $\arctan^{(n)}(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 23.**
Soit $f : x \mapsto (x+1)^n$, montrer que $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(1+x)^{n-k}$ si $k \leqslant n$.

**Exercice 24.**
Soit $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(nf(x) + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.
2. En déduire les racines de $f^{(n)}$ pour tout $n \geqslant 1$.

## 6 Retour aux équation différentielle

**Exercice 25.**
Existe-t-il une solution non nulle de $xy'(x) + (1+x^2)y(x) = 0$ définie sur tout $\mathbb{R}$?

**Exercice 26.**
Déterminer l'ensemble des solutions définies sur tout $\mathbb{R}$ de $x^2y'(x) + y(x) = x^2 + x$.

**Exercice 27.**
Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(1-x)^2y'(x) = 2-x$ ?

## 7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

**Exercice 28.**
Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

**Exercice 29.**
Étudier la dérivabilité de $h :\mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$.

**Exercice 30.**

Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$.

**Exercice 31.**

Étudier la dérivabilité de $f$ définie par $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $f(0) = 0$;.

**Exercice 32.**
Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+x^3 \end{array}\right.$. Montrer que $f$ est bijective, que sa bijection réciproque $f^{-1}$ est dérivable et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

**Exercice 33.**
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore $f$ la fonction prolongée. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que $f'$ n'est pas continue en 0.

**Exercice 34.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que

$$f(x) - f(-x) = x\left(f'(c) + f'(-c)\right).$$

**Exercice 35.**
Calculer la dérivée $n$-ème de la fonction $x \mapsto x^{n-1} \ln x$.

**Exercice 36.**
Calculer la dérivée $n$-ième de $f : x \mapsto (x^2+1)e^x$.

**Exercice 37.**
Calculer la dérivée $n$-ième de $f : x \mapsto x^2(1+x)^n$.

**Exercice 38.**
Déterminer la dérivée $n$-ième de $g : x \mapsto e^x \cos(x)$.

**Exercice 39.**
Calculer de deux façons différentes la dérivée $n$-ièmes de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire une expression de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

**Exercice 40.**
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer la dérivée $n$-ième de $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$.

## 8 Une fois qu'on est à l'aise

**Exercice 41.**
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f(a)$ et $f'(b) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$, $f"(c) = f(c)$.

**Exercice 42.**
Soient $a$ réel, $f : [a,+\infty[ \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,+\infty[$. On suppose que $f$ admet une limite en $+\infty$ égale à $f(a)$. Démontrer qu'il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.

**Exercice 43.**
Soit $f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $f(0) = -1$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
Montrer que si $f$ s'annule au moins deux fois, alors $f'$ aussi.

**Exercice 44.**
Soit $f$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Le résultat reste-t-il vrai si la limite de $f'$ est non nulle?

**Exercice 45.**
Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x+1)}{x+1} - \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}.$$

**Exercice 46.**
Soit $f$ bornée telle que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$. Montrer que $l = 0$.

**Exercice 47.**
Soit $f$ deux fois dérivable, bornée telle que $f" \geqslant 0$, montrer que $f$ est constante.

**Exercice 48.**
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in [0,1], |f^{(n)}(t)| \leqslant t$. Montrer que $f$ est la fonction nulle.

**Memo**

- Comment déterminer si une fonction est dérivable?
  - Utiliser les thms généraux (somme, produit, composée, quotient)
  - Calculer la limite du taux d'accroissement
  - Utiliser le théorème de la limite de la dérivée
- Comment montrer que la dérivée s'annule?
  Utiliser Rolle
- Comment majorer un taux d'accroissement?
  Utiliser le théorème des accroissements finis
- Comment calculer la dérivée $n$-ième d'une fonction ?
  - Faire une récurrence
  - Utiliser la formule de Leibniz