Correction du TD n 12

Correction 1 On calcule son taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2},$$

et comme $\mathrm{ch}(x)-1\sim\frac{x^2}{2}$, on en déduit que le taux d'accroissement admet une limite finie en 0, égale à $\frac{1}{2}$ donc f est bien dérivable.

On peut également écrire un DL1 en écrivant le DL2 de ch: $\mathrm{ch}(x)=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, donc $f(x)=\frac{x}{2}+o(x)$. On en déduit que f est dérivable et, par identification, que $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Correction 2 On a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-e^0}{y}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ et on peut prolonger par continuité en posant $f(0)=0$. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^\star$, on a :

$$f'(x)=\frac{2x^2e^{x^2}-\left(e^{x^2}-1\right)}{x^2}=2e^{x^2}-\frac{e^{x^2}-1}{x^2}.$$

Le premier terme tend vers 2, le second vers 1 donc $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=1$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Correction 3 1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On calcule le taux d'accroissements en zéro:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=|x|\to 0$$

donc f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0)=0$.
On regarde maintenant si elle est de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x>0\\ -2x & \text{si } x<0\end{cases}$$

donc $\forall x\in\mathbb{R}^\star$, $f'(x)=2|x|$. On a $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$ donc f est bien de classe$\mathcal{C}^1$. Elle n'est pas deux fois dérivable car la fonction $x\mapsto 2|x|$ n'est pas dérivable en 0.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions dérivables. On calcule le taux d'accroissements en 0 et on trouve :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{1}{1+|x|}\to 1$$

donc g est dérivable en 0 de dérivée $g'(0)=1$.
On regarde maintenant si elle est de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x>0\\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x<0\end{cases}$$

donc $\forall x\in\mathbb{R}^\star$, $g'(x)=\frac{1}{(1+|x|)^2}$. On a $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=1$ donc g est de classe $\mathcal{C}^1$. En revanche, elle n'est pas deux fois dérivable car $\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\frac{x^2+2|x|}{x(1+|x|)^2}$ n'a pas de limite en 0 puisque sa limite à gauche et sa limite à droite ne sont pas égales.

Correction 4 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et produit de fonctions dérivables. En 0, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\sin x\sin\frac{1}{x}}{x}$$

On sait que $\frac{\sin x}{x}\to 1$ quand $x\to 0$ car c'est le taux d'accroissement de sin en 0. On sait, de plus, que $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x\to 0$, ce qui montre que le taux d'accroissement n'admet pas de limite quand $x\to 0$ donc f n'est pas dérivable.

Remarque. *Pour montrer que $x\mapsto\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, on peut considérer les deux suites $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ et $y_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$ qui tendent vers 0 mais $\sin\frac{1}{x_n}=1$ et $\sin\frac{1}{y_n}=-1$.*

Correction 5 Soit f une fonction paire définie sur un ensemble symétrique A, alors

$$\forall x\in A, f(-x)=f(x).$$

On dérive cette égalité, on a :

$$\forall x\in A, -f'(-x)=f'(x).$$

La dérivée est donc une fonction impaire.
Soit f une fonction impaire définie sur un ensemble symétrique A, alors

$$\forall x \in A, f(-x) = -f(x).$$

On dérive cette égalité, on a :

$$\forall x \in A, -f'(-x) = -f'(x),$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in A, f'(-x) = f'(x).$$

La dérivée est donc une fonction paire.

Correction 6 Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x} = 1$ et à droite $\lim_{x\to 1^-} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc

$$a + b + 1 = 1.$$

Il faut maintenant que les dérivées à droites et à gauches soient égales: $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 1^+} 2ax + b = 2a + b$. Donc

$$2a + b = \frac{1}{2}.$$

Le seul couple (a, b) solution des deux équations est $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Correction 7

1. On va tracer le tableau de variations de f. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : x \mapsto -(x^2 + 2x)e^x$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ par le théorème de croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$1-4e-2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc injective. De plus, $f(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 1]$ donc g est surjective. Cette corestriction est donc bien bijective.

2. La fonction réciproque g^{-1} est dérivable en tout x tel que $g' \circ g^{-1}(x) \neq 0$. La fonction g' s'annule en 0 donc g^{-1} n'est pas dérivable en $g(0) = 1$, elle est donc dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

3. On a $g(1) = 1 - e$ et pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{g' \circ g^{-1}(x)}$. On a donc $\left(g^{-1}\right)'(1-e) = \dfrac{1}{g' \circ g^{-1}(1-e)} = \dfrac{1}{g'(1)} = -\dfrac{1}{3e}$.

Correction 8 Pour que la fonction soit continue, elle doit être continue en $1/2$ car elle l'est ailleurs par les théorèmes usuels. On a :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(2x-1) = \lim_{y\to 0^+} f(y) = f(0)$$

et

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(2x) = \lim_{y\to 1^-} f(y) = f(1)$$

il faut donc avoir $f(0) = f(1)$.

On sait que f est dérivable en dehors de $\frac{1}{2}$. Calculons la limite à gauche à droite du taux d'accroissement en $\frac{1}{2}$. On a :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{g(x) - g(1/2)}{x - 1/2} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{f(2x-1) - f(0)}{x - 1/2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f'(0)$$

et

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{g(x) - g(1/2)}{x - 1/2} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{f(2x) - f(1)}{x - 1/2} = \lim_{y\to 1^-} \frac{f(y) - f(1)}{y - 1} = f'(1)$$

on doit donc avoir $f'(0) = f'(1)$.

On en déduit que f est dérivable si $f(0) = f(1)$ et $f'(0) = f'(1)$.

Correction 9 On commence par déterminer si f admet une limite finie en 0. Par définition de la partie entière, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x},$$

d'où, en multipliant par x^2,

$$x(1-x) \leqslant f(x) \leqslant x.$$

Par le théorème d'encadrement, on sait que f admet une limite en 0 et que celle-ci vaut 0 donc f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

Pour savoir si son prolongement, que l'on note encore f, est dérivable, on étudie le taux d'accroissement en 0. On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

D'après l'encadrement de la partie entière, on a :

$$1-x \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 1,$$

donc, par le théorème d'encadrement, le taux d'accroissement de f en 0 admet une limite finie en 0 égale à 1. Ainsi, le prolongement continu de f en 0 est bien dérivable en 0.

Correction 10 On suppose par l'absurde que f' n'est pas identiquement nulle. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) \neq 0$. Comme f' est continue, on peut trouver un intervalle ouvert I, centré en α, sur lequel f' ne s'annule pas. On a alors :

$$\forall x \in I, f'(x)f(x) = 0 \text{ et } f'(x) \neq 0$$

donc $\forall x \in I, f(x) = 0$ ce qui montre que f est constante sur cet intervalle. Cela implique que f' est nulle sur cet intervalle ce qui est absurde. On a donc montré, par l'absurde, que f' est la fonction nulle.

Correction 11 Pour $y = 0$, on obtient $f(0) = 0$ puis en dérivant l'égalité $f(x+y) = f(x) + f(y)$ par rapport à x, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f'(x+y) = f'(x).$$

On en déduit que f' est une constante d'où, comme $f(0) = 0$, $f : x \mapsto ax$. Réciproquement, une telle fonction vérifie bien l'égalité donc on a trouvé toutes les solutions.

Correction 12 On sait que φ est continue sur $[-1, 0]$ et $\varphi(-1)\varphi(0) < 0$, on applique le TVI entre -1 et 0: il existe $c \in]-1, 0[$ tel que $\varphi(c) = 0$. On applique maintenant le théorème de Rolle entre c et 1: φ est continue sur $[c, 1]$, dérivable sur $]c, 1[$ et $\varphi(c) = \varphi(1) = 0$. Il existe donc $d \in]c, 1[$ tel que $\varphi'(d) = 0$ donc φ' s'annule.

Correction 13 On a f continue sur $[-1, 0]$ et $f(0) < \frac{1}{2} < f(-1)$. On applique le TVI entre -1 et 0: il existe $c \in]-1, 0[$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, f étant continue, on sait que $f([0, +\infty[)$ est un intervalle. Il est non borné puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ et il contient 0 puisque $f(0) = 0$. On en déduit qu'il contient $[0, +\infty[$ donc il contient le réel $\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe $d > 0$ tel que $f(d) = \frac{1}{2}$.

On a maintenant f continue sur $[c, d]$, dérivable sur $]c, d[$ et telle que $f(c) = f(d) = \frac{1}{2}$. On peut appliquer le théorème de Rolle : il existe $e \in]c, d[$ tel que $f'(e) = 0$ donc f' s'annule.

Correction 14 On suppose, sans nuire à la généralité, que $g(1) < 0$. On commence par appliquer le TVI entre 1 et 2: il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

- On a $g(1) < \frac{g(1)}{2} < g(0)$ donc il existe $a \in]0, 1[$ tel que $g(a) = \frac{g(1)}{2}$.
- On a $g(1) < \frac{g(1)}{2} < g(\alpha)$ donc il existe $b \in]1, \alpha$ tel que $g(b) = \frac{g(1)}{2}$.

On applique maintenant le thm de Rolle entre a et b: il existe $a_1 \in]a, b[\subset]0, \alpha[$ tel que $f'(a_1) = 0$.

On a

- $g(\alpha) < \frac{g(2)}{2} < g(2)$ donc il existe $c \in]\alpha, 2[$ tel que $g(c) = \frac{g(2)}{2}$.
- $g(3) << \frac{g(2)}{2} < g(2)$ donc il existe $d \in]2, 3[$ tel que $g(d) = \frac{g(2)}{2}$.

On applique le thm de Rolle entre c et d: il existe $c_1 \in]c, d[\subset]\alpha, 3[$ tel que $g'(c_1) = 0$. Comme $a_1 < \alpha < c_1$, on a bien $a_1 \neq c_1$. On peut maintenant appliquer le thm de Rolle entre a_1 et c_1 et on obtient un réel en lequel g" s'annule.

Correction 15 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x = y$, le résultat est clair. Sinon, par le théorème des accroissements finis, il existe c strictement compris entre x et y tel que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(y)}{x - y} = \arctan'(c) = \frac{1}{1 + c^2}.$$

On a donc

$$\left| \frac{\arctan(x) - \arctan(y)}{x - y} \right| \leqslant 1.$$

Ceci étant vrai pour tout couple (x, y), on a l'inégalité souhaitée.

Correction 16 On pose $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors l'encadrement se réécrit :

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} \leqslant f'(n) \leqslant \frac{f(n) - f(n-1)}{n - (n-1)}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $\alpha_n \in]n, n+1[$ et $\beta_n \in]n-1, n[$ tels que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(\alpha_n) \text{ et } \frac{f(n) - f(n-1)}{n - (n-1)} = f'(\beta_n).$$

On remarque, de plus, que la fonction f' est décroissante. On a $\beta_n < n < \alpha_n$ donc

$$f'(\alpha_n) \leqslant f'(n) \leqslant f'(\beta_n),$$

ce qui montre l'encadrement souhaité.

Correction 17 On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, on cherche à déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{f(1-x)-f(1+x)}{x}$.
On écrit
$$\frac{f(1-x)-f(1+x)}{x} = -2\frac{f(1-x)-f(1+x)}{(1-x)-(1+x)}.$$
Par le théorème des accroissements finis, on sait que pour tout x, il existe c_x strictement compris entre $1-x$ et $1+x$ tel que
$$\frac{f(1-x)-f(1+x)}{(1-x)-(1+x)} = f'(c_x).$$
On a $f'(c_x) = -\frac{1}{5}c_x^{-\frac{6}{5}}$ et $f'(c_x)$ est compris entre $f'(1-x)$ et $f'(1+x)$. Quand x tend vers 0, $f'(1-x)$ et $f'(1+x)$ tendent vers $f'(1) = -\frac{1}{5}$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0} f'(c_x) = -\frac{1}{5}$. On en déduit que :
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}\right) = \frac{2}{5}.$$

Correction 18 Soit $x > 0$, la fonction f est continue sur $[0, 2x]$, dérivable sur $]0, x[$ donc, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, 2x[$ tel que $\frac{f(2x)}{x} = \frac{f(2x)-f(0)}{2x-0} = f'(c)$. En multipliant par $2x$, on a bien l'égalité souhaitée.

Correction 19 Pour tout réel $M > 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x > A\ f'(x) > M$. Soit maintenant $x > A$, alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]A, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(c_x)$. On a donc $f(x) > f(A) + (x-A)f'(c_x)$ et comme $c_x > A$, on a $f(x) > f(A) + (x-A)M$.

On sait que $\lim_{x\to+\infty} f(A) + (x-A)M = +\infty$ donc, par le théorème de minoration, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Correction 20 La fonction f est continue sur $[0, 1]$ car dérivable, dérivable sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1)$. On peut appliquer le théorème de Rolle : il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Comme on sait que $f" \leqslant 0$, la fonction f' est décroissante donc elle est négative ou nulle sur $[0, \alpha]$ et positive ou nulle sur $[\alpha, 1]$.
Soit $x \in [0, \alpha]$, alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\beta \in]0, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(\beta)$. Comme $f'(\beta) \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, on a $f(x) - f(0) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 0$.
Soit maintenant $x \in]\alpha, 1]$, alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\gamma \in]x, 1[$ tel que $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(\gamma)$. Comme $f'(\gamma) \leqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$, on a $f(x) - f(1) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 0$.

On a montré que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant 0$ donc la fonction f est positive.

Correction 21

1. La fonction f_1 est de classe $\mathcal{C}^n$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. On pose $g_1 : x \mapsto x$ et $h_1 : x \mapsto e^{-x}$. On va appliquer la formule de Leibniz.
   - On a $g_1' = 1$ et $\forall k \geqslant 2, g_1^{(k)} = 0$.
   - On a $h_1' : x \mapsto -e^{-x}$, $h_1" : x \mapsto e^{-x}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, h_1^{(k)} = (-1)^k h_1$.

   On applique maintenant la formule de Leibniz: pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_1^{(k)}(x) h_1^{(n-k)}(x) \\ &= g_1(x)h_1^{(n)}(x) + n g_1'(x) h_1^{(n-1)}(x) + 0 \\ &= x(-1)^n e^{-x} + n(-1)^{n-1}e^{-x} = (-1)^n (x-n)\, e^{-x}. \end{aligned}$$

2. La fonction f_2 est de classe $\mathcal{C}^n$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. On pose $g_2 : x \mapsto x^2$ et $h_2 : x \mapsto e^x$. On va appliquer la formule de Leibniz.
   - On a $g_2' : x \mapsto 2x$, $g_2" : x \mapsto 2$ et $\forall k \geqslant 3, g_2^{(k)} = 0$.
   - On a $\forall k \in \mathbb{N}, h_2^{(k)} = h_2$.

   On applique maintenant la formule de Leibniz: pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_2^{(k)}(x) h_2^{(n-k)}(x) \\ &= g_2(x)h_2^{(n)}(x) + n g_2'(x) h_2^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} g"_2(x) h_2^{(n-2)}(x) \\ &= \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) e^x. \end{aligned}$$

3. La fonction f_3 est de classe $\mathcal{C}^n$ en tant que puissance d'une fonction affine qui est donc de classe $\mathcal{C}^n$.
   On a $f_3' : x \mapsto ak(ax+b)^{k-1}$, $f_3" : x \mapsto a^2k(k-1)(ax+b)^{k-2}$, pour $n \leqslant k$, on a $f_3^{(n)} : x \mapsto a^n \frac{k!}{(k-n)!}(ax+b)^{k-n}$ et pour $n > k$, $f_3^{(n)} = 0$.

4. On a f_4 de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ qui ne s'annule pas. On calcule ses dérivées successives:

- $f_4' : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$
- $f"_4 : x \mapsto \dfrac{2}{(1-x)^3}$
- $f_4^{(3)} : x \mapsto \dfrac{3!}{(1-x)^4}$
- $\forall k \in \mathbb{N},\ f_4^{(k)} : x \mapsto \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

On a donc $f_4^{(n)} : x \mapsto \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

5. On remarque que $f_5 = \dfrac{1}{2} f_4'$, on a donc $f_5^{(n)} = \dfrac{f_4^{(n+1)}}{2} = \dfrac{(n+1)!}{2(1-x)^{n+2}}$.

6. On a f_6 de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ qui ne s'annule pas. On a $f_6' : \dfrac{-a}{(ax+b)^2}$, $f_6" : x \mapsto \dfrac{2a^2}{(ax+b)^3}$, $f_6^{(3)} : x \mapsto \dfrac{-3!a^3}{(ax+b)^4}$ et, par une récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N},\ f_6^{(n)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

Correction 22 Posons $f = \arctan$, on a $f' : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f" : x \mapsto -\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Nous allons montrer, par récurrence sur $n \geqslant 2$ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(1+x^2\right)\arctan^{(n)}(x) + 2(n-1)x\arctan^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)\arctan^{(n-2)}(x) = 0.$$

On fixe $x \in \mathbb{R}$, on commence par montrer que la propriété est vraie au rang 2 pour initialiser.

On a :

$$(1+x^2).\frac{-2x}{1+x^2} + 2.1.x.\frac{1}{1+x^2} + 0 = 0,$$

la propriété est donc vraie au rang 2.

On suppose que la propriété est vraie au rang n, on a donc :

$$\left(1+x^2\right)\arctan^{(n)}(x) + 2(n-1)x\arctan^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1)\arctan^{(n-2)}(x) = 0.$$

On dérive cette égalité, on obtient:

$$2x\arctan^{(n)}(x) + (1+x^2)\arctan^{(n+1)}(x) + 2(n-1)\arctan^{(n-1)}(x)$$

$$+2(n-1)x\arctan^{(n)}(x) + (n-2)(n-1)\arctan^{(n-1)}(x) = 0,$$

soit, après simplification :

$$\left(1+x^2\right)\arctan^{(n+1)}(x) + 2nx\arctan^{(n)}(x) + (n-1)n\arctan^{(n-1)}(x) = 0.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire.

Par le principe de récurrence, on a montré que la propriété est vraie pour tout entier n.

On souhaite maintenant calculer $\arctan^{(n)}(0)$. En prenant $x = 0$ dans l'égalité, on obtient :

$$\arctan^{(n)}(0) + (n-2)(n-1)\arctan^{(n-2)}(0) = 0,$$

donc

$$\arctan^{(n)}(0) = -(n-2)(n-1)\arctan^{(n-2)}(0).$$

Par récurrence descendante, on a donc arriver à exprimer $\arctan^{(n)}(0)$ en fonction de $\arctan^{(2)}(0)$ ou $\arctan^{(1)}(0)$ selon la parité de n.

- Si n est pair, comme $\arctan^{(2)}(0) = 0$, on obtient $\arctan^{(n)}(0) = 0$.

- Si n est impair, on l'écrit $n = 2p+1$, on a alors

$$\begin{aligned}\arctan^{(2p+1)}(0) &= -(2p-1).2p\arctan^{(2p-1)}(0)\\ &= 2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)\arctan^{(2p-3)}(0)\\ &= -2p.(2p-1)\dots(2p-5)\arctan^{(2p-5)}(0)\\ &= (-1)^p 2p!\arctan^{(1)}(0)\end{aligned}$$

par une récurrence descendante. On a donc $\arctan^{(2p+1)} = (-1)^p(2p!)$.

Correction 23 On a $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$, $f"(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ et, par une récurrence immédiate, $f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(1+x)^{n-k}$, pour $k \leqslant n$. On a donc le résultat souhaité.

Correction 24 1. On le montre par récurrence sur n. On sait que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et

$$\begin{aligned}\cos\arctan(x).\sin\left(\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos^2\arctan(x)\\ &= \frac{1}{1+\tan^2\arctan(x)}\\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

La formule est vraie au rang 1. On suppose qu'elle est vraie au rang n et on dérive la formule :

$$\begin{aligned}
& f^{(n+1)}(x) \\
= \ & -(n-1)!nf'(x)\sin(f(x))\cos^{n-1}(f(x)).\sin\left(nf(x)+\frac{n\pi}{2}\right) \\
& \qquad +(n-1)!\cos^n(f(x))nf'(x)\cos\left(nf(x)+\frac{n\pi}{2}\right) \\
= \ & n!f'(x)\cos^{n-1}(f(x))\left[-\sin(f(x))\sin\left(nf(x)+\frac{n\pi}{2}\right)\right. \\
& \qquad \left.+\cos(f(x))\cos\left(nf(x)+\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
= \ & n!f\text{"}(x)\cos^{n-1}(f(x))\cos\left((n+1)f(x)+\frac{n\pi}{2}\right) \\
= \ & n!f\text{"}(x)\cos^{n-1}(f(x))\sin\left((n+1)f(x)+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) \\
= \ & n!\cos^{n+1}(f(x))\cos\left((n+1)f(x)+\frac{n\pi}{2}\right) \\
& \text{car on a vu que } f'(x)=\cos^2(f(x))
\end{aligned}$$

La formule est vraie au rang $k+1$ donc, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

2. D'après la formule montrée à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
& f^{(n)}(x)=0 \\
\Leftrightarrow \ & \cos^n(f(x))=0 \text{ ou } \sin\left(nf(x)+\frac{n\pi}{2}\right)=0 \\
\Leftrightarrow \ & \sin\left(nf(x)+\frac{n\pi}{2}\right)=0 \text{car } \cos\arctan(x)\neq 0 \\
\Leftrightarrow \ & nf(x)+\frac{n\pi}{2}\equiv 0[\pi] \\
\Leftrightarrow \ & nf(x)=k\pi-\frac{n\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \ & f(x)=\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \ & x=\tan\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \ & x=\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}\right)},\ k\in\mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \ & x=-\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k\in\mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \ & x=-\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\text{car tan est } \pi\text{-périodique}
\end{aligned}$$

Les racines de $f^{(n)}$ sont donc $-\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Correction 25 On note $I_1=\mathbb{R}_+^\star$, $I_2=\mathbb{R}_-^\star$. On sait que l'ensemble des solutions sur I_i, $i=1,2$ est

$$\left\{x\mapsto \frac{\lambda_i e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}, \lambda_i\in\mathbb{R}\right\}.$$

On cherche maintenant une solution définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'une telle solution existe et on la note f. Il est clair que $f|_{\mathbb{R}_+^\star}$ est une solution sur $\mathbb{R}_+^\star$ de l'équation donc il existe $\lambda_1\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x>0, f(x)=\frac{\lambda_1 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

De même, $f|_{\mathbb{R}_-^\star}$ est une solution sur $\mathbb{R}_-^\star$ donc il existe $\lambda_2\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x<0, f(x)=\frac{\lambda_2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

On a supposé f solution, elle est donc dérivable, ce qui implique continue. Calculons la limite à gauche et à droite de f en 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\lambda_1 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

Cette limite est finie si et seulement si $\lambda_1=0$. De même,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{\lambda_2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

est finie si et seulement si $\lambda_2=0$. Il n'existe donc pas de solution, autre que la solution nulle, définie sur tout $\mathbb{R}$.

Correction 26 On note $I_1=\mathbb{R}_+^\star$, $I_2=\mathbb{R}_-^\star$. On sait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur I_i, $i=1,2$ est :

$$\left\{x\mapsto \lambda_i e^{-\frac{1}{x}}, \lambda_i\in\mathbb{R}\right\}.$$

La fonction identité est une solution particulière, l'ensemble des solutions sur I_i, $i=1,2$ est donc :

$$\left\{x\mapsto \lambda_i e^{-\frac{1}{x}}+x, \lambda_i\in\mathbb{R}\right\}.$$

On cherche maintenant une solution définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'une telle solution existe et on la note f. Il est clair que $f|_{\mathbb{R}_+^\star}$ est une solution sur $\mathbb{R}_+^\star$ de l'équation donc il existe $\lambda_1\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x>0, f(x)=\lambda_1 e^{-\frac{1}{x}}+x.$$

De même, $f|_{\mathbb{R}_-^\star}$ est une solution sur $\mathbb{R}_-^\star$ donc il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x < 0, f(x) = \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} + x.$$

On a supposé f solution, elle est donc dérivable, ce qui implique continue. Calculons la limite à gauche et à droite de f en 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} + x.$$

Cette limite est finie si et seulement si $\lambda_2 = 0$. En revanche,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x = 0, \forall \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

On suppose donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = 0$ et on a f continue avec $f(0) = 0$. Nous allons calculer la limite du taux d'accroissement en 0^+ et 0^- afin de déterminer si f est bien dérivable en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1,$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda_1 e^{-\frac{1}{x}}}{x} + 1.$$

Par croissance comparée, cette limite est toujours égale à 1, quelque soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de l'équation définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Correction 27 On travaille sur un intervalle sur lequel $(1-x)^2$ ne s'annule pas.

On note $I_1 =]-\infty, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$.
On remarque que :

$$\frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions sur I_i, pour $i = 1,\ 2$ est :

$$x \mapsto \frac{\lambda_i e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x},\ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

On suppose qu'il existe une solution réelle f. Alors $f|_{I_i}$ est solution sur I_i donc il existe λ_i, $i = 1,\ 2$ tels que :

$$f(x) = \frac{\lambda_i e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x}, \forall x \in I_i, i = 1, 2.$$

Par croissance comparée, on a :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\lambda_2 e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x} = 0,$$

tandis que :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\lambda_1 e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x} = +\infty,$$

dès lors que $\lambda_1 \neq 0$. Si $\lambda_1 = 0$, en revanche, on a bien une fonction continue en 1.

Est-elle dérivable? On calcule le taux d'accroissement. On a :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 0,$$

puisque $f(x) = 0, \forall x \leqslant 1$ et

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 0,$$

par croissance comparée. L'ensemble des solutions réelles est donc l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Correction 28 La fonction f est la composée de cos, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction racine carrée, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Étudions sa dérivabilité en 0. On a

$$\frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} \sim -\frac{(\sqrt{x})^2}{x} = -\frac{1}{2},$$

donc le taux d'accroissement en 0 admet une limite finie ce qui montre que f est dérivable en 0 de dérivée $-\dfrac{1}{2}$.
On peut également calculer un DL : $\cos(\sqrt{x}) = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$ donc f est bien dérivable en 0.

Correction 29 La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on calcule le taux d'accroissements qui vaut $\dfrac{-|x|}{x(1+|x|)}$ et dont la limite à droite vaut -1 tandis que celle à gauche vaut 1. h n'est donc pas dérivable en 0.

Correction 30 La fonction f est la composée de $x \mapsto \ln(1+x)$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et de la fonction racine carrée, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Étudions sa dérivabilité en 0. On a :

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

On reconnaît le taux d'accroissement de $x \mapsto \ln(1+x)$, on sait donc que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)-\ln(1)}{y-0} = 1.$$

Comme $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, on en déduit que le taux d'accroissement de f admet une limite infinie en 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

Correction 31 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée et produit de fonctions dérivables. En 0, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = x\cos\frac{1}{x}$$

La fonction cos est bornée et x tend vers 0 donc f est dérivable en 0 de dérivée nulle.

Correction 32 L'application f est strictement croissante donc injective. De plus, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

donc, par continuité de f, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. La fonction f est donc bijective.
Sa bijection réciproque est dérivable si f' ne s'annule pas ce qui est le cas. On sait, de plus, que

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\circ f^{-1}(0)}.$$

On a $f^{-1}(0) = 0$ car $f(0) = 0$ et, comme $f'(x) = 1+3x^2$, on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{1+3.0^2} = 1.$$

Correction 33 La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

- Comme sinus est bornée, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ donc la fonction est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.
- Le taux d'accroissement est
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\frac{1}{x}.$$
Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) quand x tend vers 0 car sinus est bornée. La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
- Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$, Donc $f'(x)$ n'admet pas de limite quand x tend vers 0. On en déduit que f' n'est pas continue en 0.

Correction 34 On pose $g : x \mapsto f(x) - f(-x)$, la fonction est dérivable. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]0,x[$ tel que $\frac{g(x)}{x} = g'(c)$. On a $g'(x) = f(x)+f(-x)$ donc l'égalité $g(x) = xg'(c)$ est précisément l'égalité souhaitée.

Correction 35 On pose $f : x \mapsto x^{n-1}$ et $g : x \mapsto \ln(x)$. On veut appliquer la formule de Leibniz, il faut donc calculer les dérivées successives de f et g.

- On a $f' : x \mapsto (n-1)x^{n-2}$, $f" : x \mapsto (n-1)(n-2)x^{n-3}$ puis, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $x \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = (n-1)(n-2)\dots(n-k)x^{n-k-1} = \frac{(n-1)}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}$. On a, de plus, $f^{(n)} = 0$.
- On a $g' : x \mapsto \frac{1}{x}$, $g" : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, $g^{(3)} : x \mapsto \frac{2}{x^3}$, $g^{(4)} : x \mapsto -\frac{3!}{x^4}$ puis, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $g^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$.

On applique maintenant la formule de Leibniz. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}.\frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}} + 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}(n-1)!\frac{(-1)^{n-k-1}}{x} \\
&= \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^k
\end{aligned}$$

On sait que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1+(-1))^n = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^k = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\right) - (-1)^n$. On a donc

$$(fg)^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

Correction 36 On pose $h : x \mapsto (x^2+1)$. On a $h'(x) = 2x$, $h"(x) = 2$ et $h^{(k)} = 0$, $\forall k \geqslant 3$. On pose $g : x \mapsto e^x$, on a $g^{(k)} = g$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g(x) \text{d'après ce qui précède} \ . \\
&= h(x)e^x + nh'(x)e^x + \frac{n(n-1)}{2}e^x \\
&= (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x
\end{aligned}$$

Correction 37 On pose $h : x \mapsto x^2$, on a $h'(x) = 2x$, $h''(x) = 2$ et $h^{(k)} = 0, \forall k \geqslant 3$. On pose $g : x \mapsto (1+x)^n$, on a $g^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(1+x)^{n-k}$. D'après la formule de Leibniz, on a donc :

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= x^2 g(x) + 2xng'(x) + 2.\frac{n(n-1)}{2} g''(x) \\
&= x^2(1+x)^n + 2xn^2(1+x)^{n-1} + n^2(n-1)^2(1+x)^{n-2}
\end{aligned}$$

Correction 38 On pose $f : x \mapsto \cos(x)$. On a $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$. On utilise la formule de Leibniz :

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) e^x = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Correction 39 Posons $f_r : x \mapsto x^r$. Pour tout entier r et tout $k \leqslant r$, on a $f_r^{(k)}(x) = \dfrac{r!}{(r-k)!} x^{r-k}$ d'après l'exercice **??**. On a donc :

$$f_{2n}^{(n)}(x) = \frac{2n!}{n!} x^n.$$

On écrit ensuite $f_{2n} = f_n.f_n$ et on applique la formule de Leibniz:

$$\begin{aligned}
f_{2n}^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_n^{(k)}(x) f_n^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} x^k \\
&= n! x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.
\end{aligned}$$

En utilisant les deux expressions, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Correction 40 On écrit

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}.$$

On pose $h : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$. Les deux fonctions sont dérivables. On a $h'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $h^{(2)}(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$ et $h^{(3)}(x) = -\dfrac{6}{(x-1)^4}$. Par une récurrence immédiate, on a :

$$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

De même, on a

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n \left((x+1)^n + (x-1)^n\right)}{2(x^2-1)^{n+1}}.$$

Correction 41 On pose $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f'(x) - f(x))\, e^x \end{array} \right.$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et on sait que $g(a) = g(b)$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a :

$$g'(c) = (f''(c) - f(c))\, e^c.$$

Comme $e^c \neq 0$, on a nécessairement $f''(c) = f(c)$.

Correction 42 On considère la fonction $g(x) = f(a + \tan x)$ définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = f(a)$ donc g est prolongeable par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ en posant $g(\frac{\pi}{2}) = f(a)$.

La fonction g est alors continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $g(0) = f(a) = g(\frac{\pi}{2})$. D'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(\gamma) = 0$. Or $g'(x) = (1 + \tan^2 x) f'(a + \tan x)$ donc $f'(a + \tan \gamma) = 0$. En posant $c = a + \tan \gamma$, on a bien l'existence d'un point d'annulation de f'.

Correction 43 Supposons qu'il existe $m_1 < m_2$ tels que $f(m_1) = f(m_2) = 0$. Si f est constante entre m_1 et m_2, alors f' s'annule sur l'intervalle $]m_1, m_2[$. Sinon, il existe $m_0 \in]m_1, m_2[$ tel que $f(m_0) \neq 0$.

- Si $f(m_0) > 0$. Alors, par définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x > A$, $f(x) > f(m_0)$. On applique maintenant le TVI entre m_1 et m_0, entre m_0 et m_2 puis entre m_2 et $A+1$, on obtient trois antécédents distincts de $\frac{f(m_0)}{2}$. On applique ensuite Rolle deux fois afin d'obtenir deux points d'annulation de la dérivée.
- Si $f(m_0) < 0$, on applique le TVI entre 0 et m_1, entre m_1 et m_0 et entre m_0 et m_2, on obtient trois antécédents distincts de $\frac{f(m_0)}{2}$. On applique à nouveau Rolle deux fois afin d'obtenir deux points d'annulation de la dérivée.

Dans tous les cas, on a montré que f' s'annule au moins deux fois.

Correction 44 Pour tout $\epsilon > 0$, on sait qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $|f'(x)| < \epsilon$. On sait également, que pour tout $x > A$, $\exists c_x \in]A, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(c_x)$.

Pour tout $x > A$, on a donc $c_x > A$ et $\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\right| < \epsilon$. On écrit maintenant

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(A)+f(A)}{x} = \frac{x-A}{x}\frac{f(x)-(A)}{x-A} + \frac{f(A)}{x}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{x-A}{x}\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\right| + \left|\frac{f(A)}{x}\right|.$$

Comme $\frac{x-A}{x} \leqslant 1$, le premier terme est majoré par ϵ, pour tout $x > A$.
On choisit A' tel que $\forall x > A'$, $\left|\frac{f(A)}{x}\right| < \epsilon$. Pour tout $x \geqslant \max(A, A')$, on a alors

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < 2\epsilon,$$

ce qui montre que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$, on pose $g : x \mapsto f(x) - lx$. On a alors $g'(x) = f'(x) - l$ donc $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$. D'après ce qui précède, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0,$$

Or $\frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - l$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$ ce qui montre que le résultat reste vrai si la limite est non nulle.

Correction 45 On pose $f : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{x\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{x^2}$. En explicitant les expressions de ch et sh, on obtient :

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x + (x+1)e^{-x}}{2x^2},$$

et, pour $x > 0$, on a $f'(x) \geqslant \frac{(x-1)e^x}{2x^2}$. Pour tout $x > 0$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$. D'après ce qui précède, on sait que $f'(c_x) \geqslant \frac{(c_x-1)e^{c_x}}{2c_x^2}$. Utilisons maintenant l'encadrement de c_x pour minorer $\frac{(c_x-1)e^{c_x}}{2c_x^2}$. On sait que $c_x \in]x, x+1[$ donc :

$$(x-1)e^x < (c_x-1)e^{c_x} < ((x+1)-1)\,e^{x+1} \text{ et } \frac{1}{2(x+1)^2} < \frac{1}{2c_x^2} < \frac{1}{2x^2}.$$

On en déduit que, comme toutes les quantités sont positives :

$$\frac{(c_x-1)e^{c_x}}{2c_x^2} > \frac{(x-1)e^x}{2(x+1)^2},$$

d'où :

$$f'(c_x) > \frac{(x-1)e^x}{2(x+1)^2},$$

ce qui est équivalent à :

$$f(x+1) - f(x) > \frac{(x-1)e^x}{2(x+1)^2}.$$

Il suffit maintenant d'écrire

$$\frac{(x-1)e^x}{2(x+1)^2} = \frac{e^x}{2x}.\frac{(x-1).x}{(x+1)^2}.$$

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1).x}{(x+1)^2} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty$ par le théorème de croissances comparées. Par le théorème de minoration, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = +\infty$.

Pour tout $x \geqslant 1$, on a $x\text{ch}(x) - \text{sh}(x) \geqslant \text{ch}(x) - \text{sh}(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante sur $[1, +\infty[$. On a donc, pour tout $x \geqslant 1$, $f(c_x) \geqslant f(x)$. Or

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x} = \frac{e^x}{x}\left(1 + e^{-2x}\right)$$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par croissances comparées. Par le théorème de minoration, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = +\infty$.

Correction 46 On suppose par l'absurde que $l \neq 0$. Quitte à prendre $-f$, on peut supposer $l > 0$. Par définition de la limite, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \geqslant M$, $f'(x) \geqslant \frac{l}{2}$. On écrit $f(x) = f(x) - f(M) + f(M)$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x > M$ tel que $\frac{f(x) - f(M)}{x - M} = f'(c_x)$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x) - f(M)}{x - M}(x - M) + f(M) \\ &= f'(c_x)(x - M) + f(M) \\ &\geqslant \frac{l}{2}(x - M) + f(M) \text{car } c_x > M \end{aligned}$$

On a $\lim_{x \to +\infty} \frac{l}{2}(x - M) + f(M) = +\infty$ car l est strictement positif. Par le théorème de minoration, on obtient que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ce qui est une contradiction avec le fait que f est bornée. L'hypothèse $l \neq 0$ est absurde, on a donc $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Correction 47 Comme f" est positive, on sait que f' est croissante. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

- Si $f'(a) > 0$ alors pour tout $x > a$, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Par croissance de f', on a alors

$$f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ce qui implique

$$f(x) > f(a) + (x - a)f'(a)$$

car $(x - a) > 0$. Or $f'(a) > 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} (x - a)f'(a) = +\infty$$

et, par le théorème de minoration, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ce qui contredit le fait que f est bornée.

- Si $f'(a) < 0$ alors pour tout $x < a$, il existe $c_x \in]x, a[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Par croissance de f', on a alors

$$f'(a) > \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ce qui implique

$$f(x) < f(a) + (x - a)f'(a)$$

car $x - a > 0$. Or $f'(a) < 0$ donc

$$\lim_{x \to -\infty} (x - a)f'(a) = -\infty$$

et, par le théorème de majoration, on a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ce qui contredit le fait que f est bornée.

On a montré, par l'absurde, que f' est nulle donc f est constante.

Correction 48 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On va montrer tout d'abord que :

$$\forall t \in]0, 1], |f^{(n)}(t)| \leqslant t \Rightarrow \forall t \in]0, 1], |f^{(n-1)}(t)| \leqslant t^2.$$

Soit donc $t \in]0, 1]$, alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_t \in]0, t[$ tel que $\frac{f^{(n-1)}(t)}{t} = f^{(n)}(c_t)$. Or :
$|f^{(n)}(c_t)| < c_t < t$. On en déduit que :

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(t)}{t}\right| < t,$$

d'où $|f^{(n-1)}(t)| < t^2$. En appliquant le même raisonnement à $f^{(n-2)}$, on en déduit que :

$$\forall t \in]0, 1], |f^{(n-2)}(t)| < t^3.$$

Par récurrence descendante, on peut affirmer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $t \in]0, 1]$, $|f(t)| \leqslant t^n$.

Pour tout $t \in]0, 1[$, on fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $f(t) = 0$. La fonction f est donc nulle sur $]0, 1[$ et comme elle est continue en 0 et en 1, elle est nulle sur tout le segment $[0, 1]$.