Devoir maison 5.

à rendre pour le jeudi 30 janvier

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Partie 1 : *Étude de la bijection réciproque de f*

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}. On construira les tangentes à la courbe de f en 0 et en $\frac{\pi}{4}$.

3. Justifier que : $\forall x \in J, \begin{cases} \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x} \\ \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \end{cases}$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\},\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Partie 2 : *Étude des dérivées successives de f*

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

3. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)X.P_n$.
   En déduire le polynôme P_3.

5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Correction du DM5

Pour rappel, $f(x)$ n'est pas une fonction, $f(x)'$ n'a aucun sens, $Im(f(x))$, $Im(I)$ etc non plus et écrire une fonction (sans x donc) égale à une expression avec des x signifie que vous n'êtes visiblement pas au clair sur la différence entre une fonction et un réel.

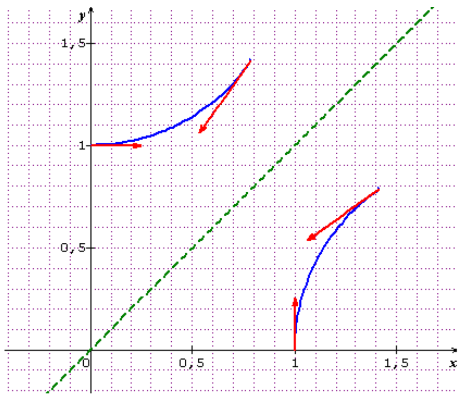
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0\dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Partie 1 : *Étude de la bijection réciproque de f*

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I car $\forall x \in [0, \pi/4],\ \cos x > 0$ et :
   $\forall x \in I,\ f'(x) = -\dfrac{\cos'(x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.
   La fonction dérivée f' est strictement positive sur $]0, \pi/4]$ et ne s'annule qu'en 0 : f alors strictement croissante sur I. Par ailleurs, $\mathrm{Im}(f) = [f(0), f(\pi/4)] = [1, \sqrt{2}] = J$. La fonction f réalise alors une bijection de $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ vers J.

   " prend ses valeurs" ne donne qu'une inclusion, pas l'image. Certains ont souhaité expliciter f^{-1} avec arccos. *Pourquoi pas mais il est alors impératif de justifier pourquoi, pour un x donné,* $\arccos\cos(x) = x$ *car cette égalité n'est pas toujours vraie.*

2. On rappelle que la courbe de f^{-1} s'obtient à partir de celle de f par symétrie orthogonale par rapport à la droite D : $y = x$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 (resp. $\pi/4$) a pour coefficient directeur $f'(0) = 0$ (tangente horizontale) (resp. $f'(\pi/4) = \sqrt{2}$).

   Le calcul des dérivées doit apparaître pour justifier l'allure des tangentes. J'en profite pour vous rappeler que tangente s'écrit avec un seul A.

3. Pour tout $x \in J$: $x = f\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{\cos(f^{-1}(x))}$, donc $\cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x}$.
   $\forall x \in J,\ f^{-1}(x) \in [0, \pi/4]$ donc $\sin\left(f^{-1}(x)\right) \geqslant 0$ et :
   $\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{\sin^2\left(f^{-1}(x)\right)} = \sqrt{1 - \cos^2\left(\cos^2(f^{-1}(x))\right)} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$.

   On commence, bien sûr, par définir x avant de se lancer dans des égalités et pour info, sinus N'est PAS égal à $\sqrt{1 - \cos^2}$.

4. La fonction f est dérivable sur $[0, \pi/4]$ et

$$\forall x \in [0, \pi/4],\ f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

On a $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur $f(]0,\pi/4])=]1,\sqrt{2}]=J\setminus\{1\}$.

Dire que $f'\circ f^{-1}$ s'annule en 1 ne suffit pas, il faut que cette fonction ne s'annule QU'en 1.

$\forall x\in J\setminus\{1\},\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\dfrac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))}=\dfrac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}}=\dfrac{1}{x^2}.\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}=\dfrac{1}{x^2}\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$.

Mais comme x est positif : $\boxed{\forall x\in J\setminus\{1\},\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$.

Remarque : $f'(0)=0$, et $\lim\limits_{x\to1^+}(f^{-1})'(x)=+\infty$, donc : f^{-1} n'est pas dérivable en 1, et sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

Il est impératif de préciser que x est positif pour le "rentrer" dans la racine carrée.

5. f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$, cette fonction possède donc un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\sqrt{2}$ qui est :
$f^{-1}(x)=f^{-1}(\sqrt{2})+(f^{-1})'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+o(x-\sqrt{2})$.
Avec $f^{-1}(\sqrt{2})=\pi/4,\ (f^{-1})'(\sqrt{2})=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient alors au voisinage de $\sqrt{2}$:

$$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2})+o_{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}).}$$

Il ne faut surtout pas développer ! un DL1 en x_0 est de la forme $a+b(x-x_0)+o(x-x_0)$.

Partie 2 : Étude des dérivées successives de f

1. La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annule pas sur I, donc par inverse, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

2. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$.
$\star$ Pour $n=0$: $\forall x\in I,\ f^{(0)}(x)=f(x)=\dfrac{1}{\cos^{0+1}(x)}$, la propriété est vraie en posant $P_0=1$.
$\star$ Supposons la propriété vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$.
$\forall x\in I:\ f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x)$
$=\dfrac{\cos x.P_n'(\sin x)\cos^{n+1}(x)-P_n(\sin x).(n+1)(-\sin x)\cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)}$
$=\dfrac{\cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)}.\left[\cos^2(x)P_n'(\sin x)+(n+1)\sin xP_n(\sin x)\right]$
$=\dfrac{1}{\cos^{n+2}(x)}.\left[(1-\sin^2(x))P_n'(\sin x)+(n+1)\sin xP_n(\sin x)\right]$.
En posant alors $P_{n+1}=(1-X^2)P_n'+(n+1)XP_n$, on a bien :
$\forall x\in I,\ f^{(n+1)}(x)=\dfrac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{n+1+1}(x)}$. La propriété est donc héréditaire, ce qui achève la récurrence.
*Le point central de la récurrence repose, comme souvent, sur l'hérédité. La propriété est " il existe un polynôme tel que", vous devez donc montrer qu'il existe un **polynôme** tel que... ce*

que vous avez bien souvent bâclé. (Un polynôme est de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$*, il n'y a pas pas de* $\sin(x)$ *dans son expression!!)*

3. $\forall x \in I: \ f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(x)} = \dfrac{P_1(\sin x)}{\cos^{1+1}(x)}$ avec $P_1 = X$.
$\forall x \in I: \ f''(x) = \dfrac{1}{\cos^4(x)}\left[\cos x \cos^2(x) - (\sin x).2(-\sin x)\cos x\right]$
$= \dfrac{(1-\sin^2(x)) + 2\sin^2 x}{\cos^3(x)}$.
Finalement : $\forall x \in I, \ f''(x) = \dfrac{P_2(\sin x)}{\cos^{2+1}(x)}$ avec $P_2 = X^2 + 1$.

4. Supposons qu'il existe un autre polynôme Q_n tel que : $\forall x \in I, \ f^{(n)}(x) = \dfrac{Q_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$: alors $\forall x \in I, \ P_n(\sin x) = Q_n(\sin x) \iff \forall x \in I, \ (P_n - Q_n)(\sin x) = 0$. Par bijectivité de la fonction sin de I dans $[0, \sqrt{2}/2]$, on obtient alors : $\forall y \in [0, \sqrt{2}/2], \ (P_n - Q_n)(y) = 0$: le polynôme $P_n - Q_n$ possède une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Le polynôme P_n tel que : $\forall x \in I, \ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$ est donc unique! Évidemment, vous n'êtes pas (encore) capables de faire ce genre de raisonnement, ici je n'attendais donc pas l'unicité de P_{n+1}.
D'après la question 2 (. et la remarque précédente), on peut affirmer que :
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{(*)}, \ P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n}$.
En effet P_{n+1} défini ainsi est bien le seul polynôme qui convient!
En particulier, avec $n = 2$: $P_3 = (1-X^2)+'_2+3XP_2 = (1-X^2)(2X)+3X(1+X^2) = \boxed{X^3+5X}$.
Là encore, P_3 *ne doit pas avoir de* $\sin(x)$*.*

5. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le terme dominant de P_n est X^n (ce qui donne à la fois son degré et son coefficient dominant!)
$\star$ La propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$.
$\star$ Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$:
le terme dominant de XP_n est alors X^{n+1}, celui de $(X^2-1)P_n'$ est nX^{n+1}. Le coefficient devant X^{n+1} dans P_{n+1} est alors $(n+1).1 - n = 1$, ainsi le terme de plus haut degré de P_{n+1} est X^{n+1}, ce qui achève la récurrence :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n, son coefficient dominant étant 1.

On pouvait aussi poser $P_n = X^n + Q_n$ *avec* $\deg(Q_n) \leqslant n+1$*. Attention à ne pas écrire des égalités qui n'ont aucun sens* $P_{n+1} \neq (n+1)X^{n+1} - nX^{n+1}$ *et écrire* $P_n = X^n + A$ *et chercher à écrire* P_{n+1} *sous la forme* $X^{n+1} + A$ *va clairement vous emmené à écrire n'importe quoi ! Certains ont raisonné avec le degré puis le coefficient dominant. C'est problématique car, sans l'étude du coefficient en* X^{n+1}*, vous ne pouvez affirmer que le polynôme est effectivement de degré* $n+1$*. En effet, la somme de deux polynômes de degré* $n+1$ *est de degré* ***au plus*** $n+1$ *(car les termes en* X^{n+1} *peuvent s'annuler). Pour affirmer qu'il est de degré* $n+1$*, il faut calculer le coefficient du terme en* $n+1$ *et montrer qu'il est non nul.*