Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DM 4

Devoir maison 4.

à rendre le 2 décembre pour les trinômes impairs.

Exercice 1.
L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions réelles u deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, qui vérifient les trois conditions suivantes :

C1 : $\forall t > 0\,,\ 2tu''(t) + (1+\sqrt{t})u'(t) - u(t) = 1$

C2 : $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t) = 0$

C3 : u est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans la suite, on considère u une solution de ce problème.

1. On pose, pour tout $t > 0$, $v(t) = u(t^2)$. Justifier que v est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer $v'(t)$ et $v''(t)$ à l'aide des fonctions u, u' et u''.
2. Montrer que v est solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation $y'' + y' - 2y = 2$.
3. Résoudre cette équation.
4. A l'aide des questions précédentes et des conditions C2 et C3, déterminer une expression de $u(t)$.
5. Conclure l'exercice.

Exercice 2.
Dans cet exercice, on cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables, **qui ne s'annulent jamais sur** $\mathbb{R}_+^*$, et telles que

$$\forall t > 0\,,\ t^2y^2(t) - ty'(t) + y(t) = 0 \qquad (E)$$

On se fixe une fonction $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose la fonction $z = \dfrac{1}{y}$.

1. Montrer que y est solution de (E) ssi z vérifie :
$$\forall t > 0\,,\ t^2 + tz'(t) + z(t) = 0 \qquad (F)$$
2. Résoudre (F).
NB : cette résolution est le nœud de l'exercice. Il est donc important de bien s'appliquer, et de donner le résultat sous une forme la plus simple possible.
3. Déterminer les solutions de (F) qui ne s'annulent jamais sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Conclure l'exercice.

Correction du DM n 4

Exercice 1 1. u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t > 0$, $t^2 > 0$. Donc par composition de fonctions dérivables, v est dérivable, et $\forall t > 0$:

$$\boxed{v'(t) = 2t\,u'(t^2)}$$

De nouveau, par produit et composition de fonctions dérivables, v' est dérivable, et :

$$\boxed{v''(t) = 2u'(t^2) + 2t \times 2t \times u''(t^2) = 2u'(t^2) + 4t^2u''(t^2)}$$

2. Soit $t > 0$. On calcule :

$$\begin{array}{rcl} v''(t) + v'(t) - 2v(t) & = & 2u'(t^2) + 4t^2u''(t^2) + 2tu'(t^2) - 2u(t^2) \\ & = & 4t^2u''(t^2) + (2+2t)u'(t^2) - 2u(t^2) \\ & = & 2\,\big(\,2t^2u''(t^2) + (1+t)u'(t^2) - u(t^2)\,\big) \\ & = & 2 \times 1 \qquad \text{d'après la condition C1 appliquée au nombre } t^2. \end{array}$$

v est donc bien solution de $y'' + y' - 2y = 2$.

On peut aussi raisonner par équivalence ce qui nous fera gagner du temps pour la phase de synthèse:

$$\begin{array}{rl} & v \text{ est solution de } y'' + y' - 2y = 2 \\ \Leftrightarrow & \forall t \geq 0, v"(t) + v'(t) - 2v(t) = 2 \\ \Leftrightarrow & \forall t \geq 0, 4t^2u''(t^2) + (2+2t)u'(t^2) - 2u(t^2) = 2 \\ \Leftrightarrow & \forall t \geq 0, 2t^2u''(t^2) + (1+t)u'(t^2) - u(t^2) \\ \Leftrightarrow & \forall t \geq 0, 2tu"(t) + (1+\sqrt{t})u'(t) - u(t) = 1 \\ & \text{ car l'image de } \mathbb{R}_+^\star \text{ par la fonction carrée est } \mathbb{R}_+^\star \end{array}$$

La dernière égalité est vraie car on a supposé que u vérifiait C_1. On en déduit que v est bien solution de l'équation différentielle.

3. Résolution de $y'' + y' - 2y = 2$. On se place sur $\mathbb{R}_+^*$.

   - Résolution de l'équation homogène. L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ a pour discriminant $1 + 8 = 9$, et donc pour racines $\frac{-1-3}{2} = -2$ et $\frac{-1+3}{2} = 1$. Les solutions sont donc les fonctions du type :

   $$y_H\ :\ t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu e^t \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

   - On remarque que la fonction constante à -1 est solution.
   - Les solutions de cette équation sont les fonctions du type :

   $$\boxed{y\ :\ t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu e^t - 1 \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

4. D'une part, v est une des fonctions trouvées à la question précédente, et d'autre part, par définition de v, on a que pour tout $t > 0$, $u(t) = v(\sqrt{t})$.
Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t > 0$:
$$u(t) \;=\; \lambda e^{-2\sqrt{t}} + \mu e^{\sqrt{t}} - 1$$
Utilisons C3. On remarque que $e^{-2\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc :
   - si $\mu > 0$, $u(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
   - si $\mu < 0$, $u(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

   Or, u est bornée, d'après C3. Les deux cas précédents sont donc impossibles, d'où $\boxed{\mu = 0}$.
On en est donc à $u(t) = \lambda e^{-2\sqrt{t}} - 1$. Utilisons C2.
On a $\sqrt{t} \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 0$, donc $e^{-2\sqrt{t}} \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} e^0 = 1$. Donc $u(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \lambda - 1$.
D'après C2, on a donc $\lambda - 1 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\lambda = 1}$.
Finalement $\boxed{\forall t > 0\,,\ u(t) = e^{-2\sqrt{t}} - 1}$.

5. Les questions précédentes montrent que si u est une solution du problème, alors u est la fonction $t \mapsto e^{-2\sqrt{t}} - 1$ (étape d'analyse).

   Faisons maintenant la synthèse, et regardons si réciproquement, la fonction $u : t \mapsto e^{-2\sqrt{t}} - 1$ est, ou non, solution du problème.

   - Etudions C1. On a :
$$u'(t) = \frac{-1}{\sqrt{t}} e^{-2\sqrt{t}} \qquad \text{et} \qquad u''(t) = \frac{1}{2t^{3/2}} e^{-2\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \times \left(\frac{-1}{\sqrt{t}}\right) e^{-2\sqrt{t}} = \left(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t}\right) e^{-2\sqrt{t}}$$
Donc :
$$\begin{aligned} 2tu''(t) + (1+\sqrt{t})u'(t) - u(t) &= 2t\left(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t}\right) e^{-2\sqrt{t}} - (1+\sqrt{t}) \times \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-2\sqrt{t}} - e^{-2\sqrt{t}} + 1 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + 2 - \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - 1\right) e^{-2\sqrt{t}} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$
C1 est donc vérifiée.
Remarque: cette étape est inutile si on a procédé par équivalence à la question 2
   - C2 est aussi vraie, car $u(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} e^0 - 1 = 0$.
   - Etudions C3. Pour tout $t > 0$:
$$\begin{aligned} -2\sqrt{t} \leqslant 0 \quad &\text{donc} \quad 0 \leqslant e^{-2\sqrt{t}} \leqslant 1 \\ &\text{donc} \quad -1 \leqslant \underbrace{e^{-2\sqrt{t}} - 1}_{u(t)} \leqslant 0. \end{aligned}$$
Cela prouve que u est bornée.

   Finalement, u est bien solution du problème.

   Conclusion : ce problème admet une unique fonction solution : $t \mapsto e^{-2\sqrt{t}} - 1$.

Exercice 2 1. $z = \dfrac{1}{y}$ donc par quotient de fonctions dérivables (y ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+^*$), z est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, z ne s'annule jamais (l'inverse d'un réel est toujours non nul). On a donc pour tout $t > 0$:

$$y(t) = \frac{1}{z(t)} \quad \text{et} \quad y'(t) = -\frac{z'(t)}{z^2(t)}.$$

La fonction y est solution de (E) si et seulement si $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned} t^2y^2(t) - ty'(t) + y(t) \ = \ 0 &\iff \frac{t^2}{z^2(t)} + t\,\frac{z'(t)}{z^2(t)} + \frac{1}{z(t)} \ = \ 0 \\ &\iff t^2 + t\,z'(t) + z(t) \ = \ 0 \qquad \text{(en multipliant par } z^2(t)\text{)} \end{aligned}$$

Cela démontre que y est solution de (E) ssi z est solution de (F).

2. $\forall t > 0$, $t^2 + t\,z'(t) + z(t) = 0 \iff z'(t) + \dfrac{1}{t}z(t) = -t.$
   Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
   Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $A : t \mapsto \ln(t)$.

   ▶ Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions du type :

   $$z_H : t \mapsto Ce^{-A(t)} = \frac{C}{t} \qquad , \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

   ▶ D'après la méthode de variation de la constante, une solution particulière est :

   $$z_P : t \mapsto C(t)e^{-A(t)} = \frac{C(t)}{t}$$

   où la fonction C est une primitive de $t \mapsto -te^{A(t)} = t^2$.
   On peut donc prendre $C : t \mapsto \dfrac{-t^3}{3}$, et $z_P : t \mapsto \dfrac{-t^2}{3}$.

   ▶ Finalement, les solutions de (F) sont les fonctions du type

   $$\boxed{z : t \mapsto \frac{C}{t} - \frac{t^2}{3} = \frac{3C - t^3}{3t} \qquad , \text{ où } C \in \mathbb{R}}$$

3. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. On a les équivalences suivantes :

   $$\begin{aligned} z(t) = 0 &\iff 3C - t^3 = 0 \\ &\iff t^3 = 3C \end{aligned}$$

   Comme $t > 0$, cette égalité est possible si et seulement si $C > 0$.
   Les solutions qui ne s'annulent jamais sont donc les fonctions du type

   $$z : t \mapsto \frac{3C - t^3}{3t} \qquad , \text{ où } \boxed{C \leqslant 0}$$

4. Les solutions du problème sont les fonctions du type : $\boxed{y : t \mapsto \dfrac{3t}{3C - t^3} \text{ , où } C \leqslant 0}$.

   Montrons-le par double implication.

   ▶ Si y est une solution de notre problème : on a vu que la fonction $z = \frac{1}{y}$ est solution de (F), et comme $z = \frac{1}{y}$, z ne s'annule jamais. Donc d'après la question précédente, il existe $C \leqslant 0$ tel que $\forall t > 0$, $z(t) = \frac{3C-t^3}{3t}$, ce qui équivaut à $y(t) = \frac{3t}{3C-t^3}$. <u>ok</u>

   ▶ Réciproquement, s'il existe $C \leqslant 0$ tel que $\forall t > 0$, $y(t) = \frac{3t}{3C-t^3}$, alors y est dérivable et ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'après la question 2, $\frac{1}{y}$ est solution de (F), ce qui implique, d'après la question 1, que y est solution de (E). y est donc une solution de notre problème. <u>ok</u>