

Devoir maison 6.

à rendre le 10 février pour les trinômes pairs.

Exercice 1.

On note $C_{p,n}$ l'ensemble des applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $C_{p,n}^s$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application croissante. Montrer que $f + id$ est une application strictement croissante.
2. Calculer $C_{p,n}^s$ pour $(p, n) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2$.
3. Calculer $C_{p,n}^s$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$.
4. Construire une bijection de $C_{p,n}$ vers $C_{p,n+p-1}^s$.
5. En déduire le cardinal de $C_{p,n}$.
6. Combien y a-t-il de p -uplets (a_1, \dots, a_p) dans $\llbracket 0, n \rrbracket^p$ vérifiant: $a_1 + a_2 + \dots + a_p \leq n$?
indication: on pourra poser $S_k = a_1 + \dots + a_k$ et utiliser la question précédente.
7. Combien y a-t-il de p -uplets (a_1, \dots, a_p) dans $\llbracket 0, n \rrbracket^p$ vérifiant: $a_1 + a_2 + \dots + a_p = n$?