

## Devoir maison 7.

à rendre le 13 février pour les trinômes impairs.

---

### Exercice 1.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ .

1.
  - (a) Déterminer un DL2 de  $f$  en 0. En déduire l'équation de sa tangente en 0 et la position du graphe de  $f$  par rapport à sa tangente.
  - (b) Montrer que la fonction  $f$  est paire. Construire son tableau de variations et donner l'allure de sa courbe représentative.
  - (c) Retrouver le résultat de la question 1a à l'aide du tableau de variations.
  - (d) Montrer que  $f$  possède un unique point fixe  $l$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - (e) Justifier :  $0 < l < \frac{1}{2}$ .
  - (f) Montrer que, pour tout réel  $x$  :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
2. On définit la suite de réels  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ . On donne  $\frac{\sqrt{e}}{e+1} \approx 0,44$ .
  - (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $|u_n - l| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ .
  - (c) Conclure.
3. Écrire dans le langage Python un algorithme qui calcule une valeur approchée de  $l$  à *precision* près, *precision* étant un réel  $> 0$  donné par l'utilisateur.