Correction du TD n 13

Correction 1 1. Il y a 25 élèves et 12 mois dans l'année donc il existe au moins un mois durant lequel trois élèves sont nés.

2. On ne peut, cependant, affirmer qu'un élève est né en janvier (ils pourraient tous les 25 être nés en décembre).

Correction 2 On divise l'intervalle $[0,1[$ en n sous-intervalles : $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ pour k variant de 0 à $n-1$. D'après le principe des tiroirs, il existe au moins un sous-intervalle contenant deux éléments distincts de E. Autrement dit, il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $(a,b) \in E^2$, $a \neq b$ tels que :

$$\frac{k}{n} \leqslant a < \frac{k+1}{n} \text{ et } \frac{k}{n} \leqslant b < \frac{k+1}{n}.$$

On a alors $|a-b| < \dfrac{1}{n}$.

Correction 3 1. Deux angles d'attaque possible. On peut remarquer que le cardinal de cet ensemble est égale à la somme de "1" sur cet ensemble c'est-à-dire :

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} 1.$$

On écrit alors :

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} 1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} 1 = \sum_{i=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On peut également avoir une approche plus intuitive et remarquer la chose suivante :

- Lorsque $i = n-1$, j ne peut valoir que n, il y a donc un unique choix pour j.
- Lorsque $i = n-2$, j peut valoir $n-1$ ou n, il y a donc deux choix.

Par une récurrence immédiate, lorsque $i = n-k$, il y a k choix pour j donc le nombre de couples (i,j) avec $i < j$ est égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

L'ensemble est en bijection avec l'ensemble de la question précédente (et la bijection est donnée par la permutation des deux coordonnées), il a donc même cardinal égal à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Cette fois-ci, l'inégalité est large, le cardinal cherché correspond donc à la somme :

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} = \sum_{j=0}^{n} (j+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

À nouveau, on raisonne avec une somme (triple!). Le cardinal cherché est égal à la somme suivante :

$$\sum_{0 \leqslant i < j < k \leqslant n} 1.$$

On remarque que i varie de 0 à $j-1$, j varie de 1 à $k-1$ et k varie de 2 à n. La somme est donc égale à :

$$\sum_{0 \leqslant i < j < k \leqslant n} 1 = \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{j-1} 1 = \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} j = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2}.$$

On remarque que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2}$, on en déduit que

$$\sum_{0 \leqslant i < j < k \leqslant n} 1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.$$

Correction 4 Pour choisir un tel ensemble il faut choisir un élément de A puis choisir un sous-ensemble du complémentaire. Celui-ci est de cardinal $n-p$ donc le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est 2^{n-p}.

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$

Correction 5 1. Le tirage des p boules est simultané donc $\binom{n}{p}$ tirages.

2. On veut que le plus petit numéro soit k, il faut donc tirer la boule k et tirer $p-1$ boules entre $k+1$ et n donc dans l'ensemble $[\![k+1, n]\!]$ contenant $n-k$ éléments, il y a donc $\binom{n-k}{p-1}$ tirages.

3. On doit choisir les p boules dans l'ensemble $[\![i, j]\!]$, il contient $j-i+1$ éléments donc $\binom{j-i+1}{p}$ tirages.

4. On doit avoir la boule numéro k, la boule numéro l et les $p-2$ autres boules dans l'ensemble $[\![k+1, l-1]\!]$ qui contient $l-k-1$ éléments donc $\binom{l-k-1}{p-2}$ tirages.

5. On a la boule i, les $p-1$ autres boules appartiennent à l'ensemble $[\![1,n]\!] \setminus \{i\}$ qui contient $n-1$ éléments donc $\binom{n-1}{p-1}$ tirages.

6. On a choisi les p boules dans l'ensemble $[\![1,n]\!] \setminus \{i\}$ qui contient $n-1$ éléments donc $\binom{n-1}{p}$ tirages.

Correction 6 1. On effectue des tirages successifs avec remises, on compte donc les p-uplets à valeur dans $[\![1,n]\!]$ d'où n^p tirages.

2. On compte les p-uplets de $[\![1,n]\!]$ dont les coordonnées sont distinctes : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

3. Il suffit d'enlever, au nombre de tirages total, les tirages où tous les numéros sont distincts : $n^p - \dfrac{n!}{(n-p)!}$

4. On choisit les tirages où la boule apparaîtra deux fois : $\binom{p}{2}$, puis la boule qui se répètera: n choix. Enfin, une fois la boule choisie et les deux tirages où elle apparaîtra fixés, on doit tirer les $p-2$ boules restantes parmi les $n-1$ numéro différents de la boule qui se répète et ces boules doivent avoir des numéros différents donc : $\dfrac{n.\binom{n}{p}(n-1)!}{(n-p+1)!} = n\dfrac{p!}{2}\binom{n-1}{p-2}$.

Correction 7 1. Un diviseur sera un entier de la forme $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $\alpha_i \in \{0,1\}$. On a donc 2^r diviseurs possibles.

2. Un diviseur sera un entier de la forme $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $\alpha_i \in [\![0, m_i]\!]$. On a donc :
$$\prod_{i=1}^{r} (m_i + 1)$$
diviseurs possibles.

Correction 8

- $\underline{M_2(K)}$: Pour chaque coefficient, on a trois choix possibles. Il y a 4 coefficients donc 3^4 éléments dans $M_2(K)$.

- $\underline{GL_2(K)}$: Un élément de $M_2(K)$ est inversible s'il est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$.

  Nous allons dénombrer l'ensemble des matrices non-inversibles c'est-à-dire celles vérifiant $ad-bc = 0$, ou, dit autrement, celles dont les lignes sont colinéaires. Cet ensemble est la réunion de deux ensembles disjoints : l'ensemble des matrices telles que $(b,c) = (0,0)$ et l'ensemble des matrices telles que $(a,b) = \lambda(b,c)$ avec $(b,c) \neq 0$. Comme a et b sont des éléments de K, on a également $\lambda \in K$.

  Il y a 3^2 matrices telles que $(b,c) = (0,0)$ (3 choix pour a et 3 choix pour d). Par ailleurs, le nombre de couples (b,d) tels que $(b,d) \neq (0,0)$ est $3^2 - 1 = 8$ et il y a trois choix pour λ donc l'ensemble es matrices telles que $(a,b) = \lambda(b,c)$ avec $(b,c) \neq 0$ et $\lambda \in K$ a $3 \times 8 = 24$ éléments. Ces deux ensembles étant disjoints, on en déduit que le nombre de matrices non inversibles dans $M_2(K)$ est $24 + 9 = 33$ et, par suite, le nombre de matrices inversibles est $3^4 - 33 = 48$.

- $\underline{S_2(K)}$: On s'intéresse maintenant aux matrices symétriques c'est-à-dire aux matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Il y a 3^3 telles matrices.

- $\underline{M_3(K)}$: il y a 9 coefficients et 3 choix pour chacun donc 3^9 éléments dans $M_3(K)$.

- $\underline{A_3(K)}$: On cherche les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix}$. Il y a donc trois coefficients à choisir et trois choix pour chacun donc 3^3 éléments dans $A_3(K)$.

Correction 9 Les deux évènements sont incompatibles, la probabilité de la réunion est donc égale à la somme des probabilités.

On commence par calculer la probabilité d'obtenir un six. On a 5 lancers possibles avec un six obtenu avec le premier dé et 5 lancers possibles avec un six obtenu avec le deuxième dé. On a donc 10 cas favorables sur un total de 6^2 cas possibles.

Le nombre de cas favorables d'obtenir deux 5 est 1. On a donc une probabilité de $\dfrac{10}{6^2} + \dfrac{1}{6^2} = \dfrac{11}{6^2}$.

Correction 10 1. Il y a $n-1$ choix pour placer "tintin au congo" (il ne peut pas être en dernière position) et 1 choix pour placer "tintin en Amérique" (juste à côté). Une fois les tintins placés, il y a ensuite $n-2$ places pour les $n-2$ livres donc autant de choix que de permutations d'un ensemble avec $n-2$ éléments ($(n-2)$). On a donc $(n-1) \times (n-2)! = (n-1)!$ cas favorables. Il y a autant de cas possibles que de permutation d'un ensemble à n éléments donc $n!$. La probabilité recherchée est donc $\dfrac{1}{n}$.

2. On peut reprendre le nombre de cas favorables trouvés à la question précédente pour bloquer les places où seront les tintins et multiplier par 2 (ce qui correspond au choix de l'ordre dans lequel ils seront).

   On peut aussi dire qu'il y a n choix pour placer le premier mais pour deux de ces choix (première et dernière position), il n'y a pas de choix pour placer à côté l'autre volume. Pour les $n-2$ positions "intérieures", en revanche, il y a deux choix pour placer le deuxième volume (un de chaque côté). On a donc $2+2(n-2)=2(n-1)$ choix pour placer les tintins. On multiplie ensuite par $(n-2)$ pour obtenir le nombre total de choix favorables.

Enfin, on peut dire que l'évènement dont on cherche à calculer la probabilité est la réunion disjointe de deux évènements: celui de la question précédente et " les livres "tintin en Amérique" et "tintin au Congo" se retrouvent côte à côte dans cet ordre". Les deux évènements ont la même probabilité.

La probabilité recherchée est donc $\dfrac{2}{n}$.

3. Il n'est pas possible qu'un seul livre ne change pas de position puisqu'il doit forcément prendre la place d'un autre, cette probabilité est donc nulle.

4. Il faut choisir les deux livres qui vont changer de place. Si on prend les couples (i,j) avec $i\neq j$, on compte deux fois chaque permutation donc $\dfrac{n(n-1)}{2}$. On peut aussi dire que l'on considère les couples (i,j) avec $i<j$ (pour être sûr de ne pas compter plusieurs fois la même permutation). Cela correspond aux parties à 2 éléments de $[\![1,n]\!]$ donc $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

   Les autres livres ne change pas de place donc on a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cas favorables. La probabilité recherchée est donc $\dfrac{n(n-1)}{2n!}=\dfrac{1}{2(n-2)!}$.

Correction 11 À chaque lancer, on a une probabilité de $\dfrac{5}{6}$ de ne pas obtenir de six. Au bout de k lancers, on a donc une probabilité de :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

de ne pas avoir de 6. Pour avoir (au moins) une chance sur 2 d'obtenir un six, il faut que :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^k \leqslant \frac{1}{2}.$$

On trouve, à l'aide de la calculatrice (aaaaahhhhh !!!!!!!!) , $k=4$.

Correction 12 1. (a) Le nombre d'évènements favorables est égal au nombre de parties à $p-1$ éléments (toute la poignée sauf la boule numérotée k) de $[\![1,k-1]\!]$ donc $\binom{k-1}{p-1}$. Le nombre de cas possibles est $\binom{n}{p}$. On a donc

$$P(A_k)=\frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}}.$$

(b) Dans une poignée de p boules, le plus grand numéro vaut au moins p. Les évènements $(A_p,\dots,A_n)$ forment donc un système complet d'évènements incompatibles. On a

$$P(\bigcup_{k=p}^{n}A_k)=\sum_{k=p}^{n}P(A_k)=1,$$

donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}=\binom{n}{p}$.

2. On compte le nombre de cas possibles : autant que de p-uplets sans répétition de $[\![1,n]\!]$ donc $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. On choisit p numéros différents, on a $\binom{n}{p}$ façons de les choisir. Une fois ces p numéros fixés, il y a $(p-1)!$ façons de les ordonner avec le plus haut numéro en dernière position (autant que de permutations des $p-1$ premières boules). On a donc $\binom{n}{p}(p-1)!$ cas favorables. En faisant le quotient, on trouve une probabilité de $\dfrac{1}{p}$.

   Plus tordu: On compte le nombre de cas possibles : autant que de p-uplets sans répétition de $[\![1,n]\!]$ donc $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. Les cas favorables s'obtiennent en faisant la réunion disjointe des cas favorables tels que max=k avec k un entier entre p et n ce qui nous donne $n-p+1$ choix pour k. Une fois k fixé, on doit choisir les $p-1$ premières boules entre 1 et $k-1$, on a $\dfrac{(k-1)!}{(k-p)!}$. On somme pour k variant de p à n. On obtient, grâce à la question précédente $\dfrac{1}{p}$.

Correction 13 1. On calcule la probabilité de l'évènement contraire : n'obtenir jamais pile. À chaque lancer, il y a une probabilité de $q=(1-p)$ d'obtenir face donc une probabilité de q^n d'obtenir toujours face. On en déduit que la probabilité d'obtenir au moins une fois pile est $1-q^n$.

2. Si face n'est jamais suivi de pile cela signifie soit qu'il n'y a eu que "pile", soit que dès qu'on a eu "face", il n'y a ensuite que "face". Notons A_k l'évènement "on obtient face pour la première fois au bout de $k+1$ lancers (A_n désignant l'évènement "on obtient que "pile"). L'évènement A_k correspond donc à k lancers où on obtient pile puis $n-k$ lancers où on obtient face. La probabilité cherchée est $P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n}\right)$. Ces évènements étant incompatibles, on a :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n}A_k\right)=\sum_{k=0}^{n}P(A_k).$$

La probabilité de l'évènement A_k est $p^k q^{n-k}$ donc la probabilité cherchée est :

$$\sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} = q^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^k = q^n \frac{1-\frac{p^{n+1}}{q^{n+1}}}{1-\frac{p}{q}} = \frac{q^{n+1}-p^{n+1}}{q-p}.$$

Correction 14 On numérote les paires de chaussettes de 1 à 20, les trois premières étant trouées. On identifie un tirage à un triplet d'éléments distincts. Il y a $\frac{20!}{17!}$ cas possibles. Le nombre de cas favorables pour que le premier tire une chaussette trouée correspond au nb de triplets distincts dont la première coordonnée est un numéro entre 1 et 3. Il y a 3 choix pour la première coordonnée, 19 pour la deuxième et 18 pour la troisième soit un nb de cas favorables de $3 \times 19 \times 18$ et une probabilité de $\frac{3}{20}$. Le nombre de cas favorables que le deuxième ou le troisième tire une chaussette trouée étant identique, on a la même probabilité de tirer une paire de chaussettes trouées, qu'on soit le premier ou le dernier à se servir.

Correction 15

1. On va calculer la probabilité de l'évènement contraire c'est-à-dire le fait de tirer uniquement des boules rouges à chaque tirage. On a une probabilité de $\frac{6}{8}$ pour le premier tirage, puis $\frac{5}{7}$ pour le deuxième et, enfin, $\frac{4}{6}$. La probabilité pour qu'on ne tire que des boules rouges est :

$$\frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{14}.$$

La probabilité pour qu'on tire au moins une boule bleue est donc :

$$1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}.$$

2. Si l'on note A l'évènement " on a tiré une boule bleue" et B l'évènement " on tire une boule bleue au premier tirage", on cherche $P_A(B)$. Par définition, on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Or:

$$P(A \cap B) = P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

et

$$P(A) = \frac{9}{14},$$

d'après la question précédente. On a donc :

$$P_A(B) = \frac{7}{18}.$$

Correction 16

1. La probabilité pour qu'elle ne contienne pas de roi est $\frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}$, la probabilité pour que la main contienne au moins un roi est donc

$$1 - \frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} = \frac{1841}{3596} \simeq 0.51.$$

2. Notons A l'évènement " la main contient au moins un roi" et B l'évènement " la main contient une figure". On cherche $P_B(A)$. Par définition, on a :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On sait que :

$$P(A \cap B) = P(A) = 1 - \frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}$$

d'après la question précédente.

Calculons $P(B)$. On va calculer la probabilité de son contraire. La probabilité pour qu'une main ne contienne aucune figure est :

$$\frac{\binom{20}{5}}{\binom{32}{5}},$$

on a donc :

$$P(B) = 1 - \frac{\binom{20}{5}}{\binom{32}{5}}.$$

On en déduit:

$$P_B(A) = \frac{1-\dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}}{1-\dfrac{\binom{20}{5}}{\binom{32}{5}}} = \frac{\binom{32}{5}-\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}-\binom{20}{5}}.$$

$$\simeq 0.55$$

3. Il y a $\binom{4}{2}$ façons de choisir deux rois parmi les 4 et $\binom{28}{3}$ façons de compléter la main sans roi. La probabilité pour avoir exactement 2 rois est donc :

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3}}{\binom{32}{5}} = \frac{351}{3296} \simeq 0.1.$$

4. Notons C l'évènement " la main contient exactement deux rois", alors, avec les notations de la première question, on cherche $P_A(C)$. On sait que :

$$P_A(C) = \frac{P(A\cap C)}{P(A)} = \frac{P(C)}{P(A)}.$$

On a calculé $P(C)$ à la question précédente. On sait donc que :

$$P_A(C) = \frac{\dfrac{\binom{4}{2}\binom{28}{3}}{\binom{32}{5}}}{1-\dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}} \simeq 0.19.$$

Correction 17 Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note U_k l'évènement "choisir l'urne k" et B désigne l'évènement "tirer une boule blanche. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k)P_{U_k}(B) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

La probabilité recherchée est donc $\dfrac{n(n+1)}{2n^2}$.

Correction 18 On note R_i l'évènement "obtenir rouge au i-ième coup" et D_1 l'évènement jouer avec le dé A.

1. On cherche à déterminer $P(R_1)$. On a :

$$P(R_1) = P(D_1)P_{D_1}(R_1) + P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(R_1) = \frac{1}{3}\times\frac{4}{6} + \frac{2}{3}\times\frac{2}{6} = \frac{4}{9}.$$

On a donc une probabilité de $\dfrac{4}{9}$ d'obtenir rouge au premier coup.

2. On cherche à calculer $P_{R_1\cap R_2}(R_3)$. Par définition, on a :

$$P_{R_1\cap R_2}(R_3) = \frac{P(R_1\cap R_2\cap R_3)}{P(R_1\cap R_2)}.$$

Par ailleurs, comme $(D_1, \overline{D_1})$ est un système complet d'évènements, on a :
$P(R_1\cap R_2) =$
$P(D_1)P_{D_1}(R_1\cap R_2) + P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(R_1\cap R_2) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{6}\times\dfrac{4}{6} + \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{9}.$
et
$P(R_1\cap R_2\cap R_3) =$
$P(D_1)P_{D_1}(R_1\cap R_2\cap R_3) + P(\overline{D_1})P_{\overline{D_1}}(R_1\cap R_2\cap R_3) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{10}{3^4}.$
On en déduit que

$$P_{R_1\cap R_2}(R_3) = \frac{\frac{10}{3^4}}{\frac{2}{9}} = \frac{5}{9}.$$

3. On cherche à déterminer $P_{\bigcap_{k=1}^{n} R_k}(D_1)$. On va inverser les conditionnements :

$$P_{\bigcap_{k=1}^{n} R_k}(D_1) = \frac{P(D_1)P_{D_1}(\bigcap_{k=1}^{n} R_k)}{P(\bigcap_{k=1}^{n} R_k)}.$$

On a

$$P_{D_1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

$P(D_1) = \dfrac{1}{3}$ et

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} R_k) = P(D_1\cap \bigcap_{k=1}^{n} R_k) + P(\overline{D_1}\cap \bigcap_{k=1}^{n} R_k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

On a donc :

$$p_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2^n}{2+2^n}.$$

Correction 19 1. On effectue n tirages successifs avec remise, l'univers des possibles est donc les n-uplets à valeur dans l'ensemble $\{N, R\}$. Il y a 2^n cas possibles. L'évènement $\overline{A}_n$ est réalisé lorsque l'on tire n boules noires ou n boules rouges donc il y a deux cas favorables. On en déduit que $P(A_n) = 1 - P(\overline{A}_n) = 1 - \frac{2}{2^n} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$.

L'évènement B_n est réalisé lorsque l'on ne tire que des boules rouges ou bien lorsque l'on tire exactement 1 boule noire, il y a un n+1 cas favorables donc $P(B_n) = \frac{n+1}{2^n}$.

2. On se place dans le cas où $n = 2$. On a donc $P(A_2) = \frac{1}{2}$ et $P(B_2) = \frac{3}{4}$. Calculons $P(A_2 \cap B_2)$. L'évènement $A_2 \cap B_2$ est réalisé si on tire une boule noire puis une boule rouge ou le contraire. Il y a donc deux cas favorables. Ainsi $P(A_2 \cap B_2) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$ et les évènements ne sont pas deux à deux indépendants.

3. On se place dans le cas où $n = 3$. On a donc $P(A_3) = \frac{3}{4}$ et $P(B_3) = \frac{4}{8}$. L'évènement $A_3 \cap B_3$ est réalisé lorsque l'on tire exactement une boule noire, il y a donc 3 cas favorables. On a donc $P(A_3 \cap B_3) = \frac{3}{8}$ donc les deux évènements sont indépendants.

Correction 20 La pièce étant équilibrée, on a $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$. Pour calculer $P(C)$, on identifie les deux lancers à un couple, il y a un deux cas favorables ((P, P) ou (F, F)) et 4 cas possibles donc $P(C) = \frac{1}{2}$.

Calculons maintenant les probabilités des intersections. On a $(A \cap B)$ correspond au lancer (P, P) donc un seul cas favorable. Ainsi $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Il en est de même de $A \cap C$ et $B \cap C$. Les évènements sont donc deux à deux indépendants.

En revanche, $A \cap B \cap C = A \cap B$ donc $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ ce qui montre que les évènements ne sont pas mutuellement indépendants.

Correction 21 1. On a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i}$. Les évènements $A_1, \ldots, A_n$ étant mutuellement indépendants, il en est de même de $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$ donc

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)).$$

2. On note respectivement C_i le i-ème chasseur tue le canard. On cherche à calculer $P(\bigcup_{i=1}^{3} C_i)$. D'après la question précédente, on a :

$$P(\bigcup_{i=1}^{3} C_i) = 1 - \prod_{i=1}^{3} (1 - P(C_i)) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

La probabilité pour que le canard soit tué est $\frac{3}{4}$.

Correction 22 Notons A l'évènement " l'élève est une fille" et B l'évènement " l'élève choisit la PC". On cherche à déterminer $P_B(A)$. On utilise la formule de Bayes :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}.$$

On sait que :

$$P_A(B)P(A) = \frac{60}{100}\frac{28}{100},$$

et :

$$\begin{aligned} P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}) &= \left(1 - P_{\overline{A}}(\overline{B})\right)(1 - P(A)) \\ &= \left(1 - \frac{54}{100}\right)\left(1 - \frac{28}{100}\right) \\ &= \frac{46}{100} \times \frac{72}{100}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$P_B(A) = \frac{\frac{60}{100} \times \frac{28}{100}}{\frac{60}{100} \times \frac{28}{100} + \frac{46}{100} \times \frac{72}{100}} \sim 0.336.$$

Correction 23 On note J_i l'évènement tirer le jeton i avec $i = 1, 2, 3$ et B l'évènement la face est blanche. On cherche à déterminer $P_B(J_1)$.

D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_B(J_1) = \frac{P(J_1)P_{J_1}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(J_i)P_{J_i}(B)}.$$

On a :

- $P(J_1)P_{J_1}(B) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

- $P(J_2)P_{J_2}(B) = \frac{1}{3} \times 0 = 0$,
- $P(J_3)P_{J_3}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

On a donc
$$P_B(J_1) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.$$

La probabilité recherchée est $\frac{2}{3}$.

Correction 24 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n (resp. B_n et C_n) l'évènement "être chez l'opérateur A (resp. B, C) la n-ième année. On utilise la formule des probabilités totales avec le SCE d'évènements non négligeables (A_n, B_n, C_n), on a

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

donc :
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{c_n}{12}.$$

De même, on trouve $b_{n+1} = \frac{a_n}{3} + b_n + \frac{7c_n}{12}$, $c_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{c_n}{3}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Des expressions trouvées à la question précédente, on en déduit

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{a_{n+1}}{3} + \frac{c_{n+1}}{12} \\ &= \frac{a_{n+1}}{3} + \frac{1}{12}\left(\frac{a_n}{3} + \frac{c_n}{3}\right) \\ &= \frac{a_{n+1}}{3} + \frac{a_n}{36} + \frac{1}{36}(12a_{n+1} - 4a_n) \text{ car } a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{c_n}{12} \\ &= \frac{a_{n+1}}{3} + \frac{a_n}{36} + \frac{a_{n+1}}{3} - \frac{a_n}{9} \end{aligned}$$
$$= \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{12}a_n$$

et, de la même manière, on trouve $c_{n+2} = \frac{2}{3}c_{n+1} - \frac{1}{12}c_n$. On en déduit que les suites sont récurrentes linéaires d'ordre 2, avec la même équation caractéristique, à savoir $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$ ou encore (plus simple pour les calculs !), $12x^2 - 8x + 1 = 0$. Le discriminant vaut 16 donc les racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$. On en déduit, qu'il existe $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{\lambda}{2^n} + \frac{\mu}{6^n} \text{ et } c_n = \frac{\lambda'}{2^n} + \frac{\mu'}{6^n}.$$

On a $a_0 = \frac{1}{3}$, $c_0 = \frac{1}{3}$ et donc $a_1 = \frac{5}{36}$ et $c_1 = \frac{2}{9}$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient pour a_n:

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= \frac{1}{3} \\ \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{6} &= \frac{5}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda + 3\mu &= 1 \\ 18\lambda + 6\mu = 5 \end{cases}$$

On fait $L_1 \leftarrow 6L_1 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} 12\mu &= 1 \\ 12\lambda &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \frac{1}{4} \\ \mu &= \frac{1}{12} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \frac{1}{4}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{12}\frac{1}{6^n} = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2 \times 6^{n+1}}.$$

On raisonne de même pour déterminer λ' et μ'. On trouve que pour tout entier n, on a
$$c_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6}\frac{1}{6^n} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{6^{n+1}}.$$

3. (a) On cherche α réel tel que $(a_n + \alpha c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha c_{n+1} &= \frac{a_n}{3} + \frac{c_n}{12} + \frac{\alpha a_n}{3} + \frac{\alpha c_n}{3} \\ &= \frac{\alpha+1}{3}a_n + \frac{4\alpha+1}{12}c_n \\ &= \frac{\alpha+1}{3}(a_n + \alpha c_n) - \frac{(\alpha+1)\alpha c_n}{3} + \frac{4\alpha+1}{12}c_n \end{aligned}$$

La suite $(a_n + \alpha c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si $\frac{4\alpha+1}{12} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{3}$. On raisonne par équivalence:

$$\frac{4\alpha+1}{12} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{3} \Leftrightarrow 4\alpha^2 + 4\alpha = 4\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{2}.$$

(b) La suite $\left(a_n + \frac{1}{2}c_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{\frac{1}{2}+1}{3} = \frac{1}{2}$ donc on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}^n \left(a_0 + \frac{1}{2}c_0\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

On a également $\left(a_n - \frac{1}{2}c_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{-\frac{1}{2}+1}{3} = \frac{1}{6}$ donc on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n - \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{6}^n\left(a_0 - \frac{1}{2}c_0\right) = \frac{1}{6^{n+1}}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = \frac{1}{4}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{12}\frac{1}{6^n} \text{ et } c_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6}\frac{1}{6^n},$$

on retrouve bien les résultats de la question précédente.

4. Pour calculer le terme général de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit de remarquer que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements. On a donc, pour tout entier n, $a_n + b_n + c_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n - c_n = 1 - \frac{3}{2^{n+2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{6^{n+1}}$.

   On peut aussi, si on ne le voit pas, remarquer que, pour tout k, $b_{k+1} - b_k = \frac{1}{3}a_k + \frac{7}{12}c_k = \frac{3}{8}\frac{1}{2^k} - \frac{5}{72}\frac{1}{6^k}$. On somme pour k variant de 0 à $n-1$, on reconnaît une somme télescopique et on obtient $b_n - b_0 = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)$ d'où

$$b_n = 1 - \frac{3}{2^{n+2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{6^{n+1}}$$

5. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$. Cela signifie que l'opérateur B aura le monopole du marché au bout d'un certain temps.

Correction 25 1. On a $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 0$.

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ v_{n+1} & = & \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ w_{n+1} & = & \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}w_n \end{array}\right.$$

3. On se retrouve avec un produit matriciel donné par la matrice $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}(2U - I_3)$, avec U la matrice avec uniquement des 1. Pour tout entier n, on a donc

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$$

Si, pour tout entier n, on note $X_n = \begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = AX_n$ donc, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.$$

Reste à calculer la puissance de A. On va utiliser le fait que pour tout $k \geqslant 1$, $U^k = 3^{k-1}U$ et la formule du binôme de Newton (puisque U et I_3 commutent). On écrit :

$$\begin{aligned}
(2U - I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}2^kU^k(-I_3)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}2^k(-1)^{n-k}U^k \\
&= (-1)^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^{n-k}2^kU^k \\
&= (-1)^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k3^{k-1}U \text{car pour tout} k \geqslant 1, U^k = 3^{-1}U \\
&= (-1)^nI_3 + \left(\sum_{k=1}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k3^{k-1}\right)U \\
&= (-1)^nI_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^{n-k}6^k\right)U \\
&= (-1)^nI_3 + \frac{1}{3}\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^{n-k}6^k\right) - (-1)^n\right)U \\
&= (-1)^nI_3 + \frac{1}{3}\left((6-1)^n - (-1)^n\right)U \text{ d'après le binôme de Newton} \\
&= (-1)^nI_3 + \frac{1}{3}\left(5^n - (-1)^n\right)U \\
&= (-1)^nI_3 + \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{3}U
\end{aligned}$$

On a donc

$$A^n = \frac{1}{5^n}\left((-1)^nI_3 + \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{3}U\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^n I_3 + \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{3\times 5^n}U.$$

On en déduit que, pour tout n,

$$X_n = A^nX_0 = \left(-\frac{1}{5}\right)^n X_0 + \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{3\times 5^n}UX_0.$$

Le vecteur UX_0 est celui ne contenant que des 1, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_n &= \left(-\dfrac{1}{5}\right)^n + \dfrac{5^n + (-1)^{n+1}}{3 \times 5^n} = \dfrac{2(-1)^n + 5^n}{3 \times 5^n} \\ v_n &= \dfrac{5^n + (-1)^{n+1}}{3 \times 5^n} \\ w_n &= \dfrac{5^n + (-1)^{n+1}}{3 \times 5^n} \end{cases}$$

Correction 26 On a $26^2 = 676$, par le principe des tiroirs, au moins deux personnes ont les mêmes initiales.

Correction 27 Il y a 366 dates d'anniversaire différentes. Comme $400 > 366$, on peut affirmer que deux élèves (au moins) ont la même date d'anniversaire.

Correction 28

1. Il y a 26 choix possibles pour chaque lettres 26^4.
2. Il y a 26 choix pour la première, 25 pour la deuxième, 24 pour la troisième et 23 pour la dernière donc $\dfrac{26!}{22!}$
3. On choisit la position de la voyelle: 4 choix. On choisit la voyelle : 6 choix On place les consonnes qui doivent être distinctes : $\dfrac{20!}{17!}$. On a donc $\dfrac{20!24}{17!}$.
4. Il y a 25 choix possibles pour chaque lettres donc 25^4.

Correction 29
Si l'on se donne deux voyelles et trois consonnes, il existe $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$ mots possibles (il suffit de choisir, par exemple, où on place les voyelles). Il existe trois répartitions où trois consonnes sont consécutives, il y a donc 7 répartitions possibles.

Comptons maintenant combien de choix pour choisir 2 voyelles et trois consonnes. Il n'est pas précisé que les lettres doivent être différentes, il y a donc 6^2 choix pour les voyelles et 20^3 choix pour les consonnes.

Au total, il existe $7.6^2.20^3 = 2\ 016\ 000$ mots.

Correction 30 Il y a 8 choix pour le premier, 7 pour le second et 6 pour le troisième donc 336.

Correction 31

1. Le premier prospectus "choisit" une boîte aux lettres, il a 10 choix. Le suivant n'a que 9 choix etc. On a donc $\dfrac{10!}{3!}$ façons.
2. Il faut choisir 7 boites aux lettres parmi les 10 donc il y a autant de façons que de parties à 7 éléments de $[\![1, 10]\!]$ soit $\binom{10}{7}$.
3. Le premier prospectus "choisit" une boîte aux lettres, il a 10 choix. Le suivant a également 10 choix puisqu'il peut y avoir plusieurs prospectus dans la même boîte. On obtient 10^7 façon.
4. Le plus simple est de faire un dessin. On place d'abord les prospectus entre les deux murs du hall d'entrée :

   $$\mathbf{|}P\ P\ P\ P\ P\ P\mathbf{|}$$

   répartir ces 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres revient à placer les séparations des boîtes aux lettres.

   Par exemple, le dessin

   $$\mathbf{|}\,P\,\mathbf{|}\,P\,\mathbf{|}\,P\,\mathbf{|}\,P\,\mathbf{|}\,P\,\mathbf{|}\,P\,\mathbf{|}\,P\,\mathbf{||||}$$

   correspond au cas où on a placé un prospectus dans les chacun des sept premières boîtes.

   Ainsi, le problème revient à compter comment répartir 7 " p" et 9 traits verticaux sur les 16 emplacements possibles (16 étant égal à 9+7), ce qui revient encore à placer les 7 "p" parmi les 16 places possibles: il y a $\binom{16}{7}$ façons.

   On peut aussi dire qu'il y a 10 boîtes aux lettres pouvant contenir de 0 à 7 prospectus. Si on note a_i le nb de prospectus dans la boîte i, on cherche donc les 10-uplets dont la somme vaut 7.

   Si on pose $x_i = a_i + 1$, on a

   $$\mathrm{Card}\{(a_1, \ldots, a_{10}) \in [\![0, 7]\!]^{10}, \sum_{i=1}^{10} a_i = 7\} = \mathrm{Card}\{(x_1, \ldots, x_{10}) \in [\![1, 7]\!]^{10}, \sum_{i=1}^{10} x_i = 17\}.$$

   D'après l'exercice 49, il y en a $\binom{16}{9}$.

Correction 32

1. Il y a autant de mains possibles que de parties à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}$.
2. Pour un as fixé, on a autant de mains possibles que de parties à 4 éléments d'un ensemble à 28 éléments (puisqu'on ne peut pas avoir un autre as). Comme il y a 4 as, on a $4\begin{pmatrix} 28 \\ 4 \end{pmatrix}$ mains possibles.
3. Il y a $\begin{pmatrix} 28 \\ 5 \end{pmatrix}$ mains ne contenant pas d'as. Il y a donc $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 \\ 5 \end{pmatrix}$ mains contenant au moins un as.

4. Il y a $\binom{28}{5}$ mains ne contenant aucun roi et autant ne contenant aucun as. Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas d'as est égal à la somme des mains ne contenant aucun roi et celles ne contenant aucune as à laquelle il faut retrancher le nombre de mains ne contenant ni as ni roi (qui a été compté deux fois). Il y a $\binom{24}{5}$ mains ne contenant ni as ni roi. Il y a donc $\binom{32}{5} - 2\binom{28}{5} + \binom{24}{5}$ mains contenant au moins un roi et un as.

Correction 33 1. Il existe autant de mots contenant les lettres R,O,M,A,I,N que de permutations d'un ensemble à 6 éléments. Le mot ROMAIN possède donc 6! anagrammes.

2. Il y a 5! permutations possibles des lettres. Cependant, comme la lettre E apparaît deux fois, un même mot est obtenu par deux permutations différentes. On a donc $\frac{5!}{2}$ mots différents donc $\frac{5!}{2}$ anagrammes.

3. Il y a 5! permutations possibles des lettres. Comme les lettres K et A apparaissent chacune deux fois, un même mot peut être obtenu par 4 permutations différentes. On a donc $\frac{5!}{4} = 30$ mots différents donc 30 anagrammes.

4. Il y a 5! permutations possibles des lettres. La lettre E apparaît apparaît 3 fois; il y a autant de permutations de lettres envoyant sur le même mot que de permutations de $[\![1, 3]\!]$. On a donc $\frac{5!}{3!} = 20$ mots différents avec ces lettres donc 20 anagrammes du mot ELEVE.

Correction 34 On a 7 faces possibles : de zéro à 6 points, on a donc 7 choix pour un côté et 7 choix pour l'autre soit 49. Cependant, les dominos qui ne sont pas symétriques ont été comptés deux fois. Il y a 49-7=42 dominos non-symétriques, on en enlève la moitié. On a donc $21 + 7 = 28$ dominos différents.

On peut aussi commencer par compter les dominos dont un des côtés ne contient pas de points: il y en a 7. Pour compter ceux qui ont un point, on a 6 choix possible pour l'autre côté: de 1 à 6 points. Ainsi, on a $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ dominos différents.

Correction 35 1. Comptons les cas favorables. On a 7 choix possibles par famille donc 7^7 choix possibles. La probabilité d'avoir une carte de chaque famille est donc :

$$\frac{7^7}{\binom{49}{7}} \simeq 0,0096.$$

2. Il n'y a que 7 familles donc 7 choix possibles. La probabilité d'avoir une famille complète est donc :

$$\frac{7}{\binom{49}{7}} \simeq 8.1 \times 10^{-8}.$$

Correction 36 1. On a 6 cas favorables sur un total de 36 cas possibles. On a donc une probabilité de $\frac{1}{6}$.

2. On a trois cas favorables : (1,3), (2,2) et (3,1). Il y a donc une probabilité de :

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

3. Il y a 6 cas où le premier dé vaut 6, et 6 cas où le deuxième vaut 6. On a donc 11 cas où un des deux dés vaut 6 car il faut enlever le cas du double six qui a été compté deux fois. On a donc une probabilité de $\frac{11}{36}$.

4. On a un cas favorable donc une probabilité de $\frac{1}{36}$.

5. On a 3×3 cas où le premier dé est pair et le deuxième est impair et autant où c'est le contraire. On a donc 18 cas favorables ce qui nous donne une probabilité de $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Correction 37 1. On note A_i l'évènement " on tire une capsule de décaféiné au i-ème tirage". On cherche $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. On a :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \left(\frac{8}{28}\right)^3 \\ &= \left(\frac{2}{7}\right)^3 \simeq 0.023. \end{aligned}$$

2. On cherche $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$. On a :

$$\begin{aligned} &P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \\ &= P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(A_3) \\ &= \frac{20}{28} \times \frac{19}{27} \times \frac{18}{26} \\ &= \frac{95}{273} \simeq 0.348, \end{aligned}$$

car on enlève une capsule normale de la boîte chaque fois qu'on en pioche une.

3. On cherche $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. L'évènement contraire est " on ne tire que des capsules normales" et sa probabilité a été calculée à la question précédente. On a donc :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - \frac{95}{273} \\ &= \frac{178}{273} \simeq 0.652. \end{aligned}$$

4. Notons :

$$C = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$$

et

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

On cherche $P_C(B)$. On a :

$$P_C(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\overline{B})}{1 - P(\overline{C})}.$$

D'après la question **2)**, on a :

$$P(\overline{B}) = \frac{95}{273}$$

et d'après la question **1)**, on a :

$$P(\overline{C}) = \left(\frac{2}{7}\right)^3.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P_C(B) &= 1 - P_C(\overline{B}) \\ &= 1 - \frac{\frac{95}{273}}{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^3} \simeq 0.644. \end{aligned}$$

5. L'évènement est égal à la réunion des évènements suivants : $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$, $\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}$ et $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$. Ces trois évènements sont incompatibles, la probabilité de la réunion est donc égale à la somme des probabilités. On a :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}) &= \frac{8}{28} \times \frac{20}{28} \times \frac{19}{27} \\ &= \frac{10.19}{27.7^2}, \\ P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) &= \frac{20}{28} \times \frac{8}{27} \times \frac{19}{27} \\ &= \frac{40.19}{7.27^2}, \\ P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) &= \frac{20}{28} . \frac{19}{27} . \frac{8}{26} \\ &= \frac{20.19}{7.27.13}. \end{aligned}$$

La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{274360}{464373} \simeq 0.59.$$

Correction 38 1. Sous l'hypothèse qu'on est roux, on note F l'évènement " avoir une fille" et E l'évènement " avoir un enfant roux" . D'après la loi de probabilité totale, on a :

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}).$$

On a :

$$P(E \cap F) = P(F) P_F(E) = \frac{1}{2} . \frac{3}{4} = \frac{3}{8},$$

et :

$$P(E \cap \overline{F}) = P(\overline{F}) P_{\overline{F}}(E) = \frac{1}{2} . \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

On a donc :

$$P(E) = \frac{17}{24} \simeq 0.71.$$

On peut aussi noter R l'évènement "être roux" et considérer que l'énoncé nous donne $P_{R \cap F}(E) = \frac{3}{4}$ et $P_{R \cap \overline{F}}(E) = \frac{2}{3}$. On cherche alors $P_R(E) = \frac{P(R \cap E)}{P(R)}$ Comme $(F, \overline{F})$ est un S.C.E, on a

$$P_R(E) = \frac{P(R \cap E \cap F) + P(R \cap E \cap \overline{F})}{P(R)}$$

On écrit maintenant

$P(R \cap E \cap F) = P(R) P_R(F) P_{R \cap F}(E)$ et $P(R \cap E \cap \overline{F}) = P(R) P_R(\overline{F}) P_{R \cap \overline{F}}(E)$

et on remplace dans l'expression de $P_R(E)$. On obtient

$$P_R(E) = P_R(F)P_{R\cap F}(E) + P_R(\overline{F})P_{R\cap\overline{F}}(E) = \frac{1}{2}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{17}{24}$$

2. Sous l'hypothèse qu'on est roux, on note R' l'évènement " notre aîné(e) a un enfant roux". On a :

$$P(R') = P(R'\cap R) + P(R'\cap\overline{R}).$$

On sait que :

$$P(R'\cap R) = P_R(R')P(R) = \left(\frac{17}{24}\right)^2 \simeq 0.5,$$

et

$$\begin{aligned} P(R'\cap\overline{R}) &= P_{\overline{R}}(R')P(\overline{R}) \\ &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{17}{24}\right) \\ &\simeq 0.097. \end{aligned}$$

La probabilité pour que notre aîné(e) ait un enfant roux lorsqu'on est roux est donc de :

$$\left(\frac{17}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{17}{24}\right) \sim 0.6.$$

Correction 39 1. On note A_i l'évènement "le paquet de piles se trouve dans le i-ième tiroir. On cherche $P\left(\bigcup_{i=1}^{5}\right)$. Les évènements étant incompatibles, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5}\right) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i) = p.$$

2. On cherche à calculer $P_{\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i}}(A_5)$. On a :

$$P_{\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i}}(A_5) = \frac{P(A_5\cap\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i})}{P(\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i})}.$$

On remarque que $\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{4} A_i}$ donc

$$P(\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i}) = 1 - \frac{4p}{5}.$$

Par ailleurs, si l'évènement A_5 est réalisé, alors $\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i}$ l'est également puisque le paquet ne peut se trouver dans deux tiroirs. On a donc $A_5 \subset \bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i}$ et, par conséquent, $A_5 \cap \bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i} = A_5$.

Ainsi, la probabilité cherchée est $\frac{\frac{p}{5}}{1-\frac{4p}{5}} = \frac{p}{5-4p}$.

Correction 40 On note B_1, B_2 et B_3 les évènements "obtenir une boule blanche au tirage 1, 2 ou 3.

1. (a) On cherche à calculer $P(B_1\cap B_2\cap\overline{B}_3)$. On a, par la formule des probabilités composées :

$$P(B_1\cap B_2\cap\overline{B}_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(\overline{B}_3) = \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5} = \frac{6}{35}.$$

La probabilité recherchée est donc $\frac{6}{35}$.

(b) Cet évènement correspond à :

$$\left(B_1\cap B_2\cap\overline{B}_3\right)\cup\left(B_1\cap\overline{B}_2\cap B_3\right)\left(\overline{B_1}\cap B_2\cap B_3\right)$$

Cette réunion est disjointe et on a :

$$P(B_1\cap\overline{B}_2\cap B_3) = \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5} = \frac{6}{35},$$

et

$$P\left(\overline{B_1}\cap B_2\cap B_3\right) = \frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5} = \frac{6}{35}.$$

La probabilité recherchée est donc $\frac{18}{35}$.

2. (a) On cherche à calculer $P(B_1\cap B_2\cap\overline{B}_3)$. Cette fois-ci les évènements sont indépendants, on a donc :

$$P(B_1\cap B_2\cap\overline{B}_3) = P(B_1)P(B_2)P(\overline{B}_3) = \left(\frac{4}{7}\right)^2\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{48}{7^3}.$$

(b) Avec le même raisonnement que précédemment, on remarque que l'évènement "une et une seule boule noire" est la réunion de trois évènements incompatibles donc la probabilité est égale à $\frac{48}{7^3}$. La probabilité recherchée est donc $\frac{144}{343}$.

3. Le tirage est désormais simultané, l'univers des possibles est donc celui des parties à 3 éléments, il y a donc $\binom{7}{3} = 35$ cas possibles.

   Parmi ces parties à trois éléments de $[\![1,7]\!]$, on recherche celle qui contienne deux éléments de $[\![1,4]\!]$ et un élément de $[\![5,7]\!]$. Une telle partie est composée d'une partie à deux éléments de $[\![1,4]\!]$ (il y en a $\binom{4}{2} = 6$) et d'une partie à 1 élément de $[\![5,7]\!]$ (il y en a $\binom{3}{1} = 3$). Il y a donc 18 cas favorables donc $\dfrac{18}{35}$.

Correction 41 On note

- A:" le chiffre du dé rouge est impair"
- B:" le chiffre du dé noir est pair"
- C:" les chiffres des deux dés ont même parité".

L'univers des possibles est l'ensemble des couples $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$, le nombre de cas possibles est $6^2 = 36$.

Pour que l'évènement A soit réalisé, il y a trois choix pour le dé rouge et, pour chacun de ces choix, 6 pour le dé noir donc 18 cas favorables. On a donc $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

De même, pour que l'évènement B soit réalisé, il y a 3 choix possibles pour le dé noir et, pour chacun de ces choix, 6 choix possibles pour le dé rouge. On a donc $P(B) = \dfrac{1}{2}$.

Pour que l'évènement C soit réalisé, on a 6 choix pour le dé rouge. Une fois la valeur du dé rouge, il y a trois choix pour le dé noir (pour avoir même parité). On a donc 18 cas favorables donc $P(C) = \dfrac{1}{2}$.

Calculons maintenant les probabilités des intersections. Pour réaliser l'évènement $A \cap B$, on a trois choix pour le dé rouge (2,4 ou 6) et trois choix pour le dé noir (1,3 ou 5) donc 9 choix en tout soit $P(A \cap B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = P(A) \times P(B)$. Les évènements A et B sont bien indépendants.

Pour réaliser l'évènement $A \cap C$, on a trois choix pour le dé rouge (2,4 ou 6) et trois choix pour le dé noir (2,4 ou 6) donc 9 choix. On a donc $P(A \cap C) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = P(A) \times P(C)$. Les évènements A et C sont bien indépendants. On montre de même que B et C sont indépendants.

En revanche, si A et B sont réalisés, alors les deux dés ne peuvent avoir la même parité donc $A \cap B \cap C = \emptyset$ ce qui montre que les trois évènements ne sont pas mutuellement indépendants.

Correction 42 1. On note A l'évènement " on mange un macaron raté" et B l'évènement " on mange un macaron fabriqué par Pierre". Le système $(B, \overline{B})$ est complet. On a donc:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}).$$

On sait que :

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = \frac{1}{3} \times \frac{8}{100} = \frac{8}{300},$$

et :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{100} = \frac{1}{50}.$$

On a donc :

$$P(A) = \frac{8}{300} + \frac{1}{50} = \frac{7}{150} \simeq 0.047.$$

2. On souhaite désormais calculer la probabilité $P_A(B)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}.$$

On sait que :

$$P_B(A)P(B) = \frac{8}{100} \times \frac{1}{3},$$

et

$$P(A) = \frac{7}{150},$$

d'après la question précédente. On a donc :

$$P_A(B) = \frac{\frac{8}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{7}{150}} = \frac{4}{7}.$$

Correction 43 On note A l'évènement "le vigile a trop arrosé son repas" et F_k " la porte est toujours fermé après k essais.

On cherche à calculer $p_k = P_{F_k}(A)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$P_{F_k}(A) = \frac{P(A)P_A(F_k)}{P(A)P_A(F_k) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(F_k)}.$$

On sait que $P(A) = \dfrac{1}{10}$ donc $P(\overline{A}) = \dfrac{9}{10}$. On remarque que $P_A(F_k)$ correspond à k tirages successifs de la mauvaise clé avec remise tandis que $P_{\overline{A}}(F_k)$ correspond à k tirages successifs sans remise de la mauvaise clé.

On a $P_A(F_k) = \left(\frac{9}{10}\right)^k$ et $P_{\overline{A}}(F_k) = \dfrac{\binom{9}{k}}{\binom{10}{k}}$. En effet, k tirages sans remise correspond à une partie à k éléments. Il y a dix clés donc $\binom{10}{k}$ cas possibles et 9 "mauvaises clés" donc $\binom{9}{k}$ cas favorables. On a $\dfrac{\binom{9}{k}}{\binom{10}{k}} = \dfrac{9!(10-k)!k!}{10!(9-k)!k!} = \dfrac{10-k}{10}$ car $10 = 10 \times 9!$ et $(10-k)! = (10-k) \times (9-k)!$. On en déduit que la probabilité cherchée est

$$p_k = \frac{\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^k}{\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^k + \frac{9}{10}\frac{10-k}{10}} = \frac{9^k}{9^k + (10-k)10^{k-1}}.$$

Correction 44 1. On cherche à dénombrer l'ensemble $\{\{A, E \setminus A\}, A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}\}$. On commence par dénombrer l'ensemble : $\{(A, E \setminus A), A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}\}$. On sait que $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^n donc $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est de cardinal $2^n - 1$ et c'est aussi le nombre d'éléments de $\{(A, E \setminus A), A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}\}$. L'ordre des groupes n'ayant pas d'importance, on doit diviser par 2 donc le cardinal cherché est $\dfrac{2^n - 1}{2}$.

2. On cherche à dénombrer l'ensemble $\{\{A_1, \dots, A_p\}, A_i \in \mathcal{P}_2(E)\}$. On commence par dénombrer l'ensemble $\{(A_1, \dots, A_p), A_i \in \mathcal{P}_2(E)\}$. Il y a $\binom{n}{2}$ choix pour A_1, $\binom{n-2}{2}$ choix pour A_2, $\binom{n-4}{2}$ choix pour A_3 et ainsi de suite. Le nombre d'éléments de $\{(A_1, \dots, A_p), A_i \in \mathcal{P}_2(E)\}$ est donc :

$$\prod_{k=0}^{p-1} \binom{n-2k}{2} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{(n-2k)!}{2(n-2k-2)} = \frac{1}{2^p} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-2k}{n-2(k+1)}.$$

On reconnaît un produit télescopique. On en déduit que :

$$\prod_{k=0}^{p-1} \binom{n-2k}{2} = \frac{n!}{2^p}.$$

Enfin, comme l'ordre des groupes n'a pas d'importance, il faut diviser par $p!$. Ainsi, le nombre de partitions en binômes est $\dfrac{n!}{p!2^p}$.

On peut aussi raisonner ainsi : on ordonne les élèves de 1 à $2p$. On choisit qui sera avec l'élève 1, on a $n-1$ choix. On prend ensuite, parmi les $n-2$ élèves restants, l'élève possédant le plus petit nombre et on choisit son binôme. Comme un binôme a déjà été formé, il reste $n-3$ choix.

En itérant, on obtient le produit des impairs : $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(2k+1)$. On multiplie cette quantité par $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k)$, on obtient $(2p)!$ et, comme $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(2k) = 2^p p!$, on retrouve le résultat $\dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

3. On généralise le raisonnement précédent. On commence par compter les p-uplets $(A_1, \dots, A_p)$ avec $A_i \in \mathcal{P}_q(E)$. Il y a $\binom{n}{q}$ choix pour A_1, $\binom{n-q}{q}$ choix pour A_2, $\binom{n-2q}{q}$ choix pour A_3 et ainsi de suite. Le nombre de tels p-uplets est donc :

$$\prod_{k=0}^{p-1} \binom{n-kq}{q} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{(n-kq)!}{q!(n-kq-q)!} = \frac{1}{(q!)^p} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{(n-kq)!}{(n-(k+1)q)!}.$$

À nouveau, on reconnaît un produit télescopique. On a donc

$$\prod_{k=0}^{p-1} \binom{n-kq}{q} = \frac{n!}{(q!)^p}.$$

L'ordre de ces p groupes n'ayant pas d'importance, on trouve que le cardinal cherché est $\dfrac{n!}{(q!)^p p!}$.

On peut aussi raisonner en ordonnant les élèves. On prend l'élève numéro 1, on choisit son groupe, on a $\binom{n-1}{q-1}$ choix. Il faut, en effet, choisir $q-1$ élèves pour former avec lui un groupe de q élèves et il y a $n-1$ choix (la classe sauf lui).

On prend ensuite l'élève restant ayant le plus petit numéro, on lui choisit ses $q-1$ partenaires. Il ne reste que $n-q-1$ élèves disponibles (ni ceux du 1er groupe, ni cet élève), on a donc $\binom{n-q-1}{q-1}$ choix. En itérant, on obtient que le nombre de choix possibles est

$$\prod_{k=0}^{p-1} \binom{n-kq-1}{q-1}.$$

Voyons maintenant comment calculer ce produit :

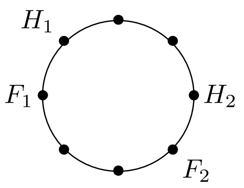
$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{p-1}\binom{n-kq-1}{q-1} &= \prod_{k=0}^{p-1}\frac{(n-kq-1)!}{(q-1)!(n-kq-q)!}\\
&= \prod_{k=0}^{p-1}\frac{(n-kq)(n-kq-1)!}{(q-1)!(n-kq)(n-kq-q)!}\\
&= \prod_{k=0}^{p-1}\frac{(n-kq)!}{(q-1)!q(p-k)(n-kq-q)!} \text{ car n=pq}\\
&= \prod_{k=0}^{p-1}\frac{(n-kq)!}{q!(p-k)(n-kq-q)!}\\
&= \frac{1}{(q!)^p}\left(\prod_{k=0}^{p-1}\frac{1}{p-k}\right)\left(\prod_{k=0}^{p-1}\frac{(n-kq)!}{(n-(k+1)q)!}\right)\\
&= \frac{1}{(q!)^p p!}\left(\prod_{k=0}^{p-1}\frac{(n-kq)!}{(n-(k+1)q)!}\right) \text{ car } \prod_{k=0}^{p-1}(p-k)=p!\\
&= \frac{n!}{(q!)^p p!} \text{ car on reconnaît un produit télescopique}
\end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat.

Correction 45

1. Le premier invité à $2n$ choix, le deuxième $2n-1$ et le dernier 1 choix donc au total $(2n)!$.

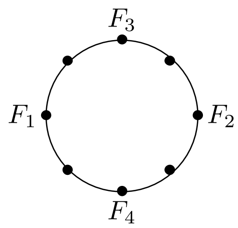
2. La première femme a $2n$ choix tandis que son conjoint n'a que 2 choix (à sa gauche ou à sa droite). La deuxième femme a $2n-2$ choix, son conjoint en revanche n'a aucun choix. En effet, une fois placé, il doit rester un nombre pair de places de chaque côté du couple. Faisons un petit dessin pour $n=4$. On numérote les femmes $F_1, F_2 \ldots$ et $H_1, \ldots$ les hommes. Sur le dessin de gauche, on a placé le premier couple. F_2 se met où elle veut (disons en face de H_1), en revanche, H_2 ne peut se mettre que tel qu'il est placé sur le dessin de droite. En effet, s'il se place de l'autre côté, il n'y a qu'une place entre H_1 et F_2 donc un couple devra être séparé.

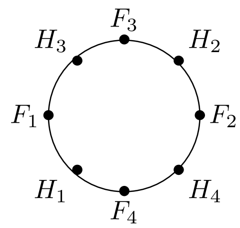


Ainsi, le premier couple $(2n).2$ choix, le deuxième $(2n-2)$, le troisième $(2n-4)$... On a donc $2^n.n!$ plan de tables.

3. On commence par placer les femmes. La première femme a $2n$ choix. Une fois qu'elle est placée, les autres femmes doivent laisser un nombre impair de places entre elles donc la deuxième a $(n-1)$ choix, la troisième $(n-2)$ etc. Les femmes ont donc $2n \times (n-1)! = 2(n!)$ choix. Une fois qu'elles sont placées, il reste n places pour les hommes qui peuvent se mettre comme ils veulent donc $n!$ choix soit au total $2(n!)^2$.

4. On suppose maintenant que les couples ne doivent pas être séparés ET on veut alterner les sexes. On va reprendre notre dessin de tout à l'heure pour $n=4$. On place d'abord (dessin de gauche) les femmes F_1, F_2, F_3, F_4 qui ont $2.n!$ choix pour se placer. Le premier conjoint a 2 choix, à gauche ou à droite de F_1 mais une fois placé, les hommes n'ont plus aucun choix! en effet, une fois H_1 placé (par exemple à droite de F_1), H_3 est obligé de se mettre entre F_2 et F_3 ainsi de suite.





Ainsi, il y a $2.n!$ choix pour les filles et 2 choix pour les garçons donc $4.n!$ choix au total.

Correction 46

1. Il y a autant d'images possibles que parties à n éléments de F donc $\binom{p}{n}$ (avec $\binom{p}{n}=0$ si $n>p$ et, pour chaque image, autant d'injections ayant cette image que de bijections de $[|1,n|]$. On a donc $n!\binom{p}{n}$.

2. Il y a autant d'applications strictement croissantes que d'images possibles puisqu'étant donnée un ensemble image, on sait exactement comment affecter les éléments (le plus petit est l'image de 1, le second l'image de 2 etc) donc $\binom{p}{n}$.

3. Quitte à introduire des bijections, on suppose désormais $E=[|1,n|]$ et $F=[|1,p|]$. Le plus simple est de se ramener au cas précédent. Pour cela, on considère l'application $g(k)=f(k)+k-1$ où f est croissante. Alors g est strictement croissante et va de $[|1,n|]$ dans $[|1,n+p-1|]$. Il y a $\binom{n+p-1}{n}$ telles fonctions. Étant donnée une fonction strictement croissante g de $[|1,n|]$ dans

$[|1, n+p-1|]$, on peut lui associer une fonction croissante de $[|1,n|]$ dans $[|1,p|]$ en posant $f(k) = g(k)-k+1$. Cette fonction est bien définie dans $[|1,p|]$ car $g(1) \geqslant 1$, ce qui implique $g(k) \geqslant k$ par croissance de g et, de même, $g(n) \leqslant n+p-1$ implique, toujours par croissance de g, $g(k) \leqslant n+p-1-(n-k) = p-1+k$. Il y donc autant de fonctions croissantes de $[|1,n|]$ dans $[|1,p|]$ que de fonctions strictement croissantes de $[|1,n|]$ dans $[|1,n+p-1|]$, soit $\binom{n+p-1}{n}$.

Correction 47 Tous les éléments de $[\![1,n]\!]$ doivent avoir au moins un antécédent par f. Par ailleurs, exactement l'un d'entre eux doit avoir deux antécédents distincts. On choisit quel élément de $[\![1,n]\!]$ a deux antécédents : n choix On détermine quels sont ses deux antécédents: $\binom{n+1}{2}$.

Il reste $n-1$ éléments de E à qui on doit attribuer une image parmi les $n-1$ éléments de F restants : il y a $(n-1)!$ choix. On a donc $n \times \dfrac{n(n-1)}{2} \times (n-1)! = \dfrac{n(n-1).n!}{2}$ surjections.

Correction 48 On va écrire

$$G = \bigcup_{k=0}^{n} = \{(A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \text{ tel que } A \subset B \text{ et } \mathrm{Card}(B) = k\}$$

La réunion est disjointe, le cardinal de G sera donc la sommes des cardinaux. Pour $k \in [\![1,n]\!]$ fixé, on a $\binom{n}{k}$ choix pour B et une fois B fixé, on a 2^k choix pour A (autant que de sous-parties de B, B étant de cardinal k).

On a donc

$$\mathrm{Card}(G) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

Correction 49 On va raisonner par récurrence sur k. Soit donc HR_k la propriété " pour tout entier n, le nombre de k-listes $(x_1, \ldots, x_k)$ telles que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_k = n$ est $\binom{n-1}{k-1}$".

Montrons que ce résultat est vrai au rang 1. Pour tout n, (n) est l'unique 1-liste dont la somme de ses éléments vaut n, c'est bien égal à $\binom{n-1}{0}$.

On va montrer le rang 2 pour comprendre un peu comment ça fonctionne. L'ensemble dont on cherche le cardinal peut s'écrire

$$\{(i, n-i), i \in [\![1, n-1]\!]\}.$$

Il est de cardinal $n-1$, ce qui correspond bien à $\binom{n-1}{1}$.

Soit maintenant k tel que le résultat est vrai au rang k, montrons qu'il est vrai au rang $k+1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit

$$\begin{aligned} &\{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in (\mathbb{N}^\star)^{k+1}, \sum_{j=1}^{k+1} x_j = n\} \\ = &\bigcup_{i=1}^{n-k} \{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in (\mathbb{N}^\star)^{k+1}, \sum_{j=1}^{k+1} x_j = n \mathrm{ET} x_{k+1} = i\}. \end{aligned}$$

La somme varie entre 1 et $n-k$ car la dernière coordonnée vaut au plus $n-k$ (dans le cas où les k premières valent 1). Par ailleurs, la réunion est disjointe, le cardinal recherché vaut donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{Card}\{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in (\mathbb{N}^\star)^{k+1}, \sum_{j=1}^{k+1} x_j = n\} \\ = &\sum_{i=1}^{n-k} \mathrm{Card}\{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in (\mathbb{N}^\star)^{k+1}, \sum_{j=1}^{k+1} x_j = n \mathrm{ET} x_{k+1} = i\}. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in [\![1, n-k]\!]$,

$$\mathrm{Card}\{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in (\mathbb{N}^\star)^{k+1}, \sum_{j=1}^{k+1} x_j = n \mathrm{ET} x_{k+1} = i\} = \mathrm{Card}\{(x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbb{N}^\star)^{k}, \sum_{j=1}^{k} x_j = n-$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in (\mathbb{N}^\star)^{k+1}, \sum_{j=1}^{k+1} x_j = n\} &= \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-i-1}{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-k-1} \binom{n-i-1}{k-1} + \binom{k-1}{k-1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-k-1} \left(\binom{n-i}{k} - \binom{n-i-1}{k}\right) \\ &= \text{ d'après la formule de Pascal} \\ &= 1 + \binom{n-1}{k} - \binom{k}{k} \\ &= \binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $k+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier k strictement positif.

On peut aussi raisonner de manière plus combinatoire en remarquant que $(1+1+1+\ldots+1) = n$, il faut donc placer $k-1$ symboles)(dans les $n-1$ places entre les 1 pour scinder notre somme en k facteurs. Il y a donc $\binom{n-1}{k-1}$ tels k-uplets.

Correction 50 Le nombre de parties à n éléments de F est $\binom{a+b}{n}$. Par ailleurs, on peut écrire $F = A \cup B$ avec $\mathrm{Card}(A) = a$ et $\mathrm{Card}(B) = b$. Une partie à n éléments de F est alors la réunion disjointe d'une partie à k éléments de A et d'une partie à $n-k$ éléments de B. On doit avoir $k \in [\![0, a]\!]$ et $n-k \in [\![0, b]\!]$, ce qui impose $k \in [\![0, a]\!]$ et $k \in [\![n-b, n]\!]$, autrement dit

$$k \in [\![\max(0, n-b), \min(a, n)]\!].$$

Pour un tel entier k, on a $\binom{a}{k}$ choix de parties à k éléments de A et $\binom{b}{n-k}$ choix pour une partie de B à $n-k$ éléments.

L'ensemble des parties à n éléments de F est la réunion disjointe, pour k variant de $\max(0, n-b)$ à $\min(a, n)$, de l'ensemble des parties s'écrivant comme l'union d'une partie à k éléments de A et d'une partie à $n-k$ éléments de B. Ainsi, on a bien

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

Correction 51 Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'évènement " une personne est descendu au k-ième étage", alors $\overline{A_k} = \{w : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!] \setminus \{k\}\}$.

On a

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} P(\overline{A_{i_1}} \cap \overline{A_{i_2}} \cap \ldots \cap \overline{A_{i_k}} \right).$$

On remarque que l'évènement $\overline{A_{i_1}} \cap \overline{A_{i_2}} \cap \ldots \cap \overline{A_{i_k}}$ signifie que personne n'est descendu aux étages $i_1, \ldots, i_k$, il y a autant de cas favorables que d'applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n-k]\!]$ c'est-à-dire $(n-k)^p$ (et n^p cas possibles).

Le nombre de termes de la somme, c'est-à-dire le nombre de k-uplets $(i_1, \ldots, i_k)$ tels que $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ est égal au nombre de parties à k éléments de $[\![1, N]\!]$ donc $\binom{n}{k}$.

On a donc

$$P(A) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^p.$$

On fait un changement d'indice dans la somme ($j = n-k$) et on retrouve la formule ci-dessus. C'est aussi la probabilité qu'une application aléatoire de $[\![1, p]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$ soit une surjection.

Correction 52 On note D l'évènement "la cellule se divise" et, pour tout i, E_i l'évènement "la lignée est éteinte à la $i+1$-ième génération.

1. On cherche à calculer E_1. On a :

$$u_1 = P(E_1) = P(D)P_D(E_1) + P(\overline{D})P_{\overline{D}}(E_1).$$

   On remarque si la cellule ne s'est pas divisée, elle est morte donc $P_{\overline{D}}(E_1) = 1$. Par ailleurs, si elle s'est divisée, la probabilité pour que la lignée s'éteigne à la 2ème génération est égale à la probabilité de l'évènement "les deux cellules meurent". Cet évènement est l'intersection de deux évènements indépendants ("la première cellule meurt" et "la deuxième cellule meurt"), sa probabilité vaut donc le produit des probabilités à savoir $(1-p)^2$.

   On a donc $u_1 = p(1-p)^+(1-p)$ ou encore $u_1 = pu_0^2 + 1 - p$.

2. On reprend le même raisonnement que ci-dessus. On a une cellule et deux choix possibles : elle se divise ou elle meurt. L'évènement E_{n+1} est donc la réunion disjointe des évènements "la cellule meurt dès la première étape" et "la cellule commence par se diviser" ET A: "les deux lignées issues de ces cellules sont éteintes à la $n+1$-ième génération".

   Ainsi,

$$u_{n+1} \\ = P(D)P_D(A) + P(\overline{D}).$$

   À nouveau, l'évènement A est l'intersection de deux évènements indépendants donc

$$P_D(A) = u_n^2.$$

   On a donc, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = pu_n^2 + (1-p).$$

3. On pose f_p la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_p : x \mapsto px^2 + 1 - p$. On a montré que $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f_p(u_n)$.

   Cette fonction est croissante. Par ailleurs, on a $f_p(u_0) = f_p(1-p) = p(1-p)^2 + (1-p) = (1-p)(p(1-p)+1) \geqslant 1-p$ car $p(1-p) > 0$.

   On montre donc, par une récurrence immédiate sur n, que $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} \geqslant u_n$ car la fonction f_p est croissante.

   Par ailleurs, on a $f_p(0) = 1 - p \geqslant 0$ et $f_p(1) = 1$ donc $[0, 1]$ est un intervalle stable par f_p. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ donc la suite est bornée et on peut affirmer, compte tenu de sa monotonie, qu'elle est convergente.

   Pour déterminer sa limite, on cherche les points fixes de f_p. En effet, si $u_n \to l$, alors $f_p(u_n) \to f_p(l)$ par continuité de f_p. Or $u_{n+1} \to l$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} =$

$f_p(u_n)$ donc, par unicité de la limite, on a $f_p(l) = l$. On raisonne par équivalence :

$$f_p(l) = l \Leftrightarrow pl^2 + (1-p) = l \Leftrightarrow pl^2 - l + (1-p) = 0 \Leftrightarrow l = 1 \text{ ou } l = \frac{1-p}{p}.$$

Si $p \leqslant \frac{1}{2}$, on a $\frac{1-p}{p} \geqslant 1$, il n'y a donc qu'un seul point fixe dans l'intervalle $[0,1]$ et $u_n \to 1$. Cela signifie que la lignée de la cellule va finir par s'éteindre de manière quasi-certaine.

En revanche, si $p > \frac{1}{2}$, alors $1-p \leqslant \frac{1-p}{p} < 1$ car $p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$. On a $u_0 < \frac{1-p}{p}$ donc, par croissance de f_p, on montre, avec une récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \frac{1-p}{p}.$$

On en déduit que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit être inférieur ou égale à $\frac{1-p}{p}$, ce qui n'est pas le cas de 1 donc $u_n \to \frac{1-p}{p}$. Dans ce cas, la probabilité pour que la lignée s'éteigne tend vers une limite non nulle et cette limite est d'autant plus faible que la valeur de p est grande (ce qui est cohérent !).

Correction 53 1. (a) Pour tout entier n, on note F_n l'évènement "la fortune du joueur s'élève à n" et G l'évènement "le joueur gagne".

Quand on cherche à calculer u_a, on part donc de l'évènement F_a et on cherche à calculer la probabilité pour que, au bout d'un certain nombre de tours, on ait F_0. Pour tout a fixé, lorsque la fortune du joueur vaut a, il peut gagner ou perdre. Par la formule des probabilités totales, on a donc:

$$P(F_a) = P(G)P_G(F_{a+1}) + P(\overline{G})P_{\overline{G}}(F_{a-1}) = p \times P_G(F_{a+1}) + (1-p) \times P_{\overline{G}}(F_{a-1}).$$

Revenons au calcul de u_a. On cherche à calculer les probabilités des différents chemins menant à 0 en partant d'une fortune a. D'après le travail ci-dessus, on voit qu'il suffit de compter les chemins passant par F_{a+1} et ceux passant par F_{a-1}. Or, la probabilité des chemins passant par F_{a+1} est exactement égale à la probabilité de se retrouver ruiné en partant d'une fortune de $a+1$ (donc u_{a+1}) et, de même, la probabilité des chemins passant par F_{a-1} vaut u_{a-1}.

On a donc, pour tout entier a :

$$u_a = pu_{a+1} + (1-p)u_{a-1}.$$

(b) On se retrouve avec l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \ u_N = 0 \\ \forall a \geqslant 1, u_a = pu_{a+1} + (1-p)u_{a-1} \end{cases}$$

L'équation caractéristique est $pr^2 - r + (1-p) = 0$. On remarque que 1 est une solution évidente donc l'autre racine vaut $\frac{1-p}{p}$. On en déduit qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall a \in \mathbb{N}, u_a = \alpha + \beta\left(\frac{1-p}{p}\right)^a.$$

En utilisant les valeurs connues de u_0 et u_N, on trouve $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha + \frac{1-p}{p}\beta = 0$ donc $\alpha = -\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$ et $\beta = \frac{1}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N}$.

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{N}$,

$$u_a = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - \left(\frac{1-p}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N},$$

ce qui est bien la formule donnée dans l'énoncé.

Lorsque $N \to +\infty$, la limite va dépendre de p. En effet, si $1-p < p$ c'est-à-dire $p > \frac{1}{2}$, alors $\left(\frac{1-p}{p}\right)^N \to 0$ et $u_a \to \left(\frac{1-p}{p}\right)^a$. La probabilité de finir ruiné va donc tendre vers une valeur non nulle et qui sera d'autant plus élevée que l'on part avec une mise de départ a élevée.

En revanche, si $p < \frac{1}{2}$, alors $u_a \to 1$ et la probabilité de finir ruiné tend vers 1, on est donc quasiment certain de finir ruiné.

2. On cherche maintenant à calculer la probabilité v_a pour que le casino finisse ruiné. On reprend le raisonnement fait à la question 1a) et l'égalité donnée par la formule des probabilités totales. Cette fois-ci, on cherche à calculer la probabilité des différents chemins menant à F_N. On se retrouve donc à avoir :

$$\begin{cases} v_0 = 0, \ v_N = 1 \\ \forall a \geqslant 1, v_a = pv_{a+1} + (1-p)v_{a-1} \end{cases}$$

On sait déjà, d'après les calculs effectués, qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall a \in \mathbb{N}, v_a = \lambda + \mu\left(\frac{1-p}{p}\right)^a.$$

Avec les conditions initiales, on a $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha + N\beta = 1$. On suppose que $N \neq 1$ (sinon le jeu ne démarre pas ou bien s'arrête au bout d'un tour). On a donc

$$\alpha = \frac{N}{N-1} = -\beta.$$

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a

$$v_a = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}.$$

3. On remarque que, pour tout $a \in \mathbb{N}$, $u_a + v_a = 1$. La probabilité pour que le casino et le joueur s'affronte indéfiniment correspond à la probabilité de l'évènement "le joueur n'est jamais ruiné ET le casino n'est jamais ruiné". Les évènements contraires ("le joueur est ruiné" et "le casino est ruiné") sont incompatibles donc leur réunion vaut la somme des probabilités. D'après ce qui précède, quelle que soit la mise a de départ du joueur, la somme de ces probabilités vaut 1 donc la probabilité de l'évènement "le joueur n'est jamais ruiné ET le casino n'est jamais ruiné" est 0.

   Il y a donc une probabilité nulle pour que le joueur et le casino s'affronte indéfiniment.

4. On reprend le travail fait ci-dessus avec $p = \frac{1}{2}$. On a, $\forall a \in \mathbb{N}$, $u_a = \frac{1}{2}u_{a+1} + \frac{1}{2}u_{a-1}$ donc $u_{a+1} - 2u_a + u_{a-1} = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui a une racine double égale à 1. Il existe donc deux réels α et β tels que

$$\forall a \in \mathbb{N}, u_a = \alpha + a\beta.$$

   On a $u_0 = 1$ et $u_N = 0$ donc $\alpha = 1$ et $\beta = -\frac{1}{N}$. On en déduit que pour tout $a \in \mathbb{N}$,

$$u_a = 1 - \frac{a}{N}.$$

   On remarque que la probabilité de finir ruiné lorsque N tend vers $+\infty$ tend vers 0.

   On a également, pour tout $a \in \mathbb{N}$: $v_{a+1} - 2v_a + v_{a-1} = 0$ donc il existe deux réels λ et μ tel que

$$\forall a \in \mathbb{N}, v_a = \lambda + a\mu.$$

   Comme $v_0 = 0$ et $v_N = 1$, on a $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{N}$ d'où

$$\forall a \in \mathbb{N}, v_a = \frac{a}{N}.$$

   À nouveau, on a, $\forall a \in \mathbb{N}$, $u_a + v_a = 1$ donc la probabilité pour que le casino et le joueur s'affronte indéfiniment est nulle.