Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2024-2025
DS 5

Devoir surveillé 5, sujet 1 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.
Dans tout ce problème, A désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I - Une première méthode pour le calcul des puissances de A
On pose

$$J = A - 2I_3$$

1. Calculer J^2. En déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on distinguera deux cas).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\left(\alpha_n, \beta_n\right) \in \mathbb{R}^2$, que l'on déterminera, tel que $A^n = \alpha_n J + \beta_n I_3$.
3. Calculer l'inverse de A.
4. La formule trouvée pour A^n est-elle encore valable pour $n = -1$?

Partie II - Une autre méthode de calcul des puissances de A

5. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

6. Montrer que $AP = PD_A$ où $D_A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_A^n.
8. En déduire une écriture matricielle de A^n ne dépendant que de l'entier n.
9. Comparée l'expression trouvée à celle de la partie I.

Exercice 2.

On considère un triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ de longueur de côté 1, peint en noir. On désigne respectivement par A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés $[B_0C_0]$, $[A_0C_0]$, $[A_0B_0]$ et on peint en blanc l'intérieur du triangle $A_1B_1C_1$. On effectue ensuite la même opération sur chacun des triangles encore noirs $A_0C_1B_1$, $C_1B_0A_1$, $B_1A_1C_0$ et ainsi de suite pour obtenir les figures suivantes :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{F}_n$ la figure obtenue avant la $(n+1)$-ème opération (de sorte que les figures ci-dessus représentent de gauche à droite $\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_4$) et on note :

- t_n le nombre de triangles équilatéraux noirs de $\mathscr{F}_n$;
- c_n le nombre total de leurs côtés ;
- s_n le nombre total de leurs sommets ;
- a_n la longueur de leur côté (c'est-à-dire la longueur de chaque triangle élémentaire de $\mathscr{F}_n$).

On a donc :

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ c_0 = 3 \\ s_0 = 3 \\ a_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} t_1 = 3 \\ c_1 = 9 \\ s_1 = 6 \\ a_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer (en le justifiant) les nombres t_{n+1}, c_{n+1}, s_{n+1} à l'aide des nombres t_n, c_n, s_n et en déduire l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ c_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t_n \\ c_n \\ s_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant, pour tout entier naturel n :

$$M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & u_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 3\,u_n + 1$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n uniquement en fonction de n.

4. Utiliser les résultats de la question précédente pour déterminer l'expression de t_n, c_n et s_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{(n+1)2^n}$$

1. Montrer que les deux suites sont adjacentes.
2. Justifier que les deux suites convergent vers la même limite ℓ et que $\frac{5}{8} \leqslant \ell \leqslant \frac{3}{4}$.
3. Comment choisir n pour que u_n et v_n soient des valeurs approchés de ℓ à 10^{-3} près ?
4. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.
   (a) Exprimer u_n à l'aide de f.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et simplifier l'expression de $f'(x)$ (on distinguera deux cas).
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$.
   (d) Montrer que $\ell = \ln(2)$.

Exercice 4.
Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \ln(x) \end{array} \right.$$

1. Tracer le tableau de variations de f.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

2. On suppose $u_0 \in [1, +\infty[$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.
3. On suppose désormais $u_0 \in]0, 1[$. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Correction du DS n 5, sujet 1

Exercice 1 On pose
$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$$

Partie I - Une première méthode pour le calcul des puissances de A

On pose
$$J=A-2I_3$$
On a donc
$$J=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

1. On a $J^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&0&2\\2&0&2\end{pmatrix}$. On en déduit, par une récurrence immédiate, que $J^n=2^{n-1}J$ pour $n\geqslant 1$ et $J^n=I_3$ pour $n=0$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On écrit $A=J+2I_3$. On sait que J et I_3 commutent, on peut donc appliquer le binôme de Newton :
$$\begin{aligned}A^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k2^{n-k}\\&=2^nI_3+\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}2^{k-1}\right)J\\&=2^nI_3+\left(2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right)J\\&=2^nI_3+2^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-1\right)J\\&=2^nI_3+2^{n-1}\left(2^n-1\right)J\\&=2^nI_3+\left(2^{2n-1}-2^{n-1}\right)J\\&=2^nI_3+\frac{2^{2n}-2^n}{2}J\end{aligned}$$
On a donc $A^n=\alpha_nJ+\beta_nI_3$ avec $\alpha_n=\dfrac{2^{2n}-2^n}{2}$ et $\beta_n=2^n$.

   Là, ma question n'était pas suffisamment précise, certains l'ont fait par récurrence et ça répondait à la question, j'ai donc compté tous les points. Certains encore ne sont pas allés jusqu'au bout de la simplification de α_n mais comme ça répondait aussi à la question, je n'ai pas pénalisé. Assurez-vous toutefois de savoir appliquer Newton et simplifier la somme qui commence à 1, c'est du grand classique.
3. On a $A^{-1}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}3&0&-1\\-1&4&-1\\-1&0&3\end{pmatrix}$.

4. On a $\dfrac{2^{-2}+2^{-1}}{2}=\dfrac{3}{8}$, $2^{-1}=\dfrac{4}{8}$ et $\dfrac{2^{-2}-2^{-1}}{2}=-\dfrac{1}{8}$. L'expression trouvée pour A^n est donc encore valable pour $n=-1$.

   Pour ceux qui n'avait pas explicité α_n et β_n, il suffisait de montrer que A^{-1} était bien une combinaison linéaire de I_3 et J.

Partie II - Une autre méthode de calcul des puissances de A

5. On pose

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

   Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$. On a

$$PX=Y \quad\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_3&=y_1\\x_1+x_2&=y_2\\x_1+x_3&=y_3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1&=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_3 & L_1\leftarrow\frac{1}{2}(L_1+L_3)\\x_2&=-\frac{1}{2}y_1+y_2-\frac{1}{2}y_3 & L_2\leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_1-\frac{1}{2}L_3\\-x_1&=-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_3 & L_3\leftarrow\frac{1}{2}(L_3-L_1)\end{cases}$$

   On en déduit que P est inversible et $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$

6. On a $AP=\begin{pmatrix}4&0&-2\\4&2&0\\4&0&2\end{pmatrix}$ puis $PD_A=\begin{pmatrix}4&0&-2\\4&2&0\\4&0&2\end{pmatrix}$ donc $PD_A=AP$ avec $D_A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

   Question sympa que vous pouviez faire même avec un P^{-1} faux (alors que ce qui nous intéresse est que $A=P^{-1}AP$

7. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $D_A^n=\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$

   Aucune justification attendue, c'est dans les propriétés du calcul matriciel

8. On a $A^n=\left(PD_AP^{-1}\right)^n=PD_A^nP^{-1}$. On a

$$PD_A^n=\begin{pmatrix}4^n&0&-2^n\\4^n&2^n&0\\4^n&0&2^n\end{pmatrix}$$

   puis

$$PD_A^nP^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{4^n+2^n}{2}&0&\dfrac{4^n-2^n}{2}\\\dfrac{4^n-2^n}{2}&2^n&\dfrac{4^n-2^n}{2}\\dfrac{4^n-2^n}2&0&\dfrac{4^n+2^n}{2}\end{pmatrix}$$

   On est sur du TRÉS classique!!!! à savoir faire les yeux fermés donc

9. On écrit

$$A^n = 2^n I_3 + \begin{pmatrix} \frac{4^n-2^n}{2} & 0 & \frac{4^n-2^n}{2} \\ \frac{4^n-2^n}{2} & 0 & \frac{4^n-2^n}{2} \\ \frac{4^n-2^n}{2} & 0 & \frac{4^n-2^n}{2} \end{pmatrix} = 2^n I + \frac{4^n-2^n}{2} J$$

On retrouve bien l'expression trouvée à la partie I.

Exercice 2 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le côté élémentaire de la figure $\mathcal{F}_{n+1}$ est deux fois plus petit que celui de $\mathcal{F}_n$. Autrement dit : $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$.

La suite $(a_n)_n$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2^n}.}$

On attendait un minimum d'explication quand même

2. Chaque triangle de $\mathcal{F}_n$ donne 3 triangles dans la figure $\mathcal{F}_{n+1}$. D'où $\boxed{t_{n+1} = 3t_n}$ et de même pour le nombre total de côtés $\boxed{c_{n+1} = 3c_n}$.
Pour le nombre de sommets, lorsqu'on passe de $\mathcal{F}_n$ à $\mathcal{F}_{n+1}$, on conserve les sommets précédents et chaque côté précédent aura un nouveau sommet en son milieu. Autrement dit, $\boxed{s_{n+1} = s_n + c_n.}$
D'où :

$$\begin{cases} t_{n+1} &= 3t_n & & \\ c_{n+1} &= & 3c_n & \\ s_{n+1} &= & c_n & +s_n \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{pmatrix} t_{n+1} \\ c_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} t_n \\ c_n \\ s_n \end{pmatrix}$$

Dans la mesure où les formules vous sont données, me dire juste " on constate que le nombre de sommets de la figure $\mathcal{F}_{\backslash +\infty}$ vaut la somme de c_n et s_n " c'est un peu abusé! Certains me l'ont fait par récurrence... quel intérêt?

3. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{H}(n) : \text{" } \exists u_n \in \mathbb{R} \text{ tq } M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & u_n & 1 \end{pmatrix} \text{ "}$$

— Initialisation. $M^0 = I_3$, donc la phrase $\mathcal{H}(0)$ est vraie en **posant** $\boxed{u_0 = 0}$.
— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On a alors :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n.M \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & u_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(d'après } \mathcal{H}(n)\text{)} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 3u_n+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(par produit matriciel)} \end{aligned}$$

La phrase $\mathcal{H}(n+1)$ est donc vraie en **posant** $\boxed{u_{n+1} = 3u_n + 1}$.
— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

(b) La suite u est une suite arithmético-géométrique. L'unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = 3\alpha + 1$ est $\alpha = -\frac{1}{2}$.
La suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire $(u_n + \frac{1}{2})_{n\in\mathbb{N}}$) est géométrique de raison 3 car pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right)$$

On conclut $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha + 3^n(u_0 - \alpha) = \frac{3^n - 1}{2}.}$

un quasi sans faute! par contre, si on n'avait pas bien traité la récurrence (avec notamment l'initialisation à $n = 0$, il vous manquait la valeur de u_0.

4. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note X_n le vecteur colonne $\begin{pmatrix} t_n \\ c_n \\ s_n \end{pmatrix}$, on a la relation $X_{n+1} = MX_n$.

   On en déduit par récurrence, $X_n = M^n X_0$ ce qui donne :

$$\boxed{\begin{cases} t_n & = 3^n t_0 = 3^n \\ c_n & = 3^n c_0 = 3^{n+1} \\ s_n & = u_n c_0 + s_0 = \frac{3}{2}(1+3^n) \end{cases}}$$

   Là encore, la formule de récurrence qui débouche sur un calcul de puissance de matrices qui, chance, est relativement facile, c'est du grand grand classique!

Exercice 3

1. Montrons que les deux suites sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \geqslant 0,$$

   on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est croissante. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)2^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)2^n} \\ &= \frac{1}{(n+2)2^{n+1}} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)2^{n+1}} \\ &\leqslant 0, \end{aligned}$$

   on en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est décroissante. Enfin, on a $v_n - u_n = \dfrac{1}{(n+1)2^n} \to 0$ donc les suites sont bien adjacentes.

2. D'après le théorème des suites adjacentes, on sait que ces deux suites convergent vers une limite commune. On la note ℓ. Par ailleurs, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

   Pas besoin de redémontrer le thm des suites adjacentes! Et surtout pas me dire qu'elles tendent vers la même limite " car la limite de leur différence est nulle"!!!! Pour rappel, cet argument est utilisé en toute fin de preuve, une fois que l'on a montré que les deux suites étaient convergentes.

   On a $u_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$ et $v_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, on a donc bien l'encadrement souhaité.
   Il manquait un $\leqslant$, désolée!!

3. On sait que $v_n - u_n \to 0$, on peut donc trouver un entier n pour lequel $v_n - u_n \leqslant 10^{-3}$. On aura alors $\ell - u_n \leqslant v_n - u_n \leqslant 10^{-3}$ et $v_n - \ell \leqslant v_n - u_n \leqslant 10^{-3}$. Ainsi, u_n et v_n seront des valeurs approchés de ℓ à 10^{-3} près?

4. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $u_n = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$. On a donc

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Oh une somme géométrique où il faut distinguer le cas où la raison vaut 1 !

(c) On sait que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x} \,\mathrm{d}x,$$

et $f(0) = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \,\mathrm{d}x = [-\ln|1-x|]_0^{1/2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \,\mathrm{d}x,$$

et comme $-\ln\frac{1}{2} = \ln(2)$, on a bien l'égalité souhaitée.
Très peu de personne m'ont rappelé que $f(0)$ valait 0.

(d) Il suffit de montrer que $u_n \to \ln(2)$, on aura alors $\ell = \ln(2)$ par unicité de la limite.
On a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \,\mathrm{d}x \right| &\leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{2^n(n+1)} \end{aligned}$$

On a donc bien $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \,\mathrm{d}x \to 0$ donc $u_n \to \ln(2)$.
On a bien montré que $\ell = \ln(2)$.

Le fait que $x^n \to 0$ ne suffit absolument pas ! on ne peut rentrer la limite à l'intérieur de l'intégrale sans un minimum de précaution (thm de deuxième année)

Exercice 4 1. Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$. On a $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ d'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

On remarque que 1 est un intervalle stable par f.

2. (a) On a $u_0 \in [1, +\infty[$ et cet intervalle est stable par f donc, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, +\infty[$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n) \leqslant 0.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien décroissante.

(b) On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1. Elle et donc convergente. Par continuité de f, elle ne peut converger que vers un point fixe de f. Or

$$f(x) = x \Leftrightarrow -\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

On en déduit que la suite converge vers 1.

Il est impératif de faire deux étapes distinctes : la convergence, puis la détermination de la limite en étudiant les points fixes de f.

3. On suppose $u_0 \in]0,1[$, alors d'après le tableau de variations de f, $u_1 \in]1,+\infty[$. On se retrouve donc, à partir du rang 1, dans le cas précédemment traité. On a donc $u_n \to 1$.

Beaucoup m'ont écrit que $]0,1[$ n'était pas un intervalle stable (ce qui est vrai) et en ont conclu que la suite n'était pas définie ce qui est très faux car $\mathbb{R}_+^\star$ est, lui, stable par f donc la suite est tout à fait définie.