

Devoir surveillé 5, sujet 2.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'objectif du problème est d'étudier les solutions des équations $\ln(x) + x = p$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Partie I - Étude de la suite des solutions.

- Montrer qu'il existe un unique réel $x_p \in [1, p]$ tel que $\ln(x_p) + x_p = p$.
Dans la suite du problème, cette solution sera notée x_p . On définit ainsi une suite pour tout $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.
- Montrer que la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- (a) Montrer que $\frac{\ln x_p}{p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et en déduire $x_p \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} p$.
(b) Déterminer la limite de $x_{p+1} - x_p$.
- (a) Donner un équivalent simple de $\ln x_p$.
Indication : Déterminer la limite de $\ln\left(\frac{x_p}{p}\right)$ quand p tend vers $+\infty$.
(b) En déduire $x_p = p - \ln p + o(\ln p)$.
(c) On pose $y_p = x_p - p + \ln p$. Donner un équivalent simple de y_p . En déduire

$$x_p = p - \ln p + \frac{\ln p}{p} + o\left(\frac{\ln p}{p}\right).$$

Partie II - Étude d'une suite récurrente.

Dans cette partie, l'entier p est fixé.

- Montrer que $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$.
- Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = p - \ln x$.
(a) Montrer que f est décroissante et que x_p est le seul point fixe de f .
(b) Soit $a \in [1, p]$ et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) = p - \ln(u_n) \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, p]$.

- Justifier la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ puis leur convergence.
- On pose $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ et $\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$.

Justifier que $\alpha, \beta \in [1, p]$ puis que $f(\alpha) = \beta$ et $f(\beta) = \alpha$.

- En observant que la fonction $x \mapsto x - \ln x$ est strictement croissante sur $[1, p]$, établir que $\alpha = \beta$.

Remarque : vous devez montrer le résultat "observé" avant de l'utiliser.

- En déduire que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_p$.

Partie III : Un lemme utile

Pour deux suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit le produit de Cauchy des suites a et b , noté $a \star b$, la suite c définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

- Dans cette question, on définit les deux suites (a_n) et (b_n) ainsi :
▷ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, de limite nulle.
▷ $a_n = (1/2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $c = a * b$ est donc définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} b_{n-k}$.

(a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) tels que $n < m$, l'inégalité $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer que

$$c_{2n} \leq b_{2n} + b_n + \frac{b_0}{2^n} \text{ et } c_{2n+1} \leq b_{n+1} + \frac{b_0}{2^n} + b_{2n+1}.$$

(c) En déduire que $(c_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0.

(d) Prouver que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

(e) Soit $d_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $d * b$ converge vers 0.

Partie IV : Étude d'une classe de suites

Dans cette partie, on note Ω l'ensemble des suites réelles $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

Nous allons montrer que Ω est une ensemble de suites convergentes contenant toutes les suites décroissantes - mais pas qu'elles-.

8. (a) Montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs, alors elle appartient à Ω .

(b) Montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, elle n'appartient pas à Ω .

9. Déterminer explicitement toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}).$$

En déduire qu'il existe dans Ω des suites non décroissantes.

10. Dans cette question, on se fixe une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à Ω , et d la suite définie par $d_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit enfin c telle que $c_0 = a_0$ et $c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n , établir l'égalité $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

(c) Que peut-on en déduire pour les suites $d * c$ et a ?

(d) Soit ϵ la suite définie par $\epsilon_n = c_n - \ell$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $d * \epsilon$ converge vers 0.

(e) On désigne par u la suite $d * \epsilon$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir l'égalité $u_n = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

(f) En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Exercice 2.

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B (appelé le commutant de la matrice B). Autrement dit :

$$C(B) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}$$

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On désire prouver quelques propriétés de $C(B)$.
 - (a) Donner trois éléments évidents de $C(B)$.
 - (b) Montrer que $C(B)$ est stable par combinaisons linéaires c'est-à-dire que si $(M, N) \in C(B)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda M + N \in C(B)$.
 - (c) Montrer que, si M et M' sont dans $C(B)$, alors le produit MM' est encore un élément de $C(B)$.
 - (d) Dédurre des questions précédentes que tout polynôme en B , c'est-à-dire toute matrice de la forme $\sum_{i=0}^k a_i B^i$ avec $k \geq 0$ et $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ est un élément de $C(B)$.
2. Montrer que, si M est dans $C(B)$, et M inversible, alors son inverse M^{-1} est encore un élément de $C(B)$.
3. (a) Comparer $B^\top \times B$ et $B \times B^\top$ pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
 - (b) L'ensemble $C(B)$ est-il stable par transposition?
 - (c) Montrer que si B est symétrique ou antisymétrique alors C est stable par transposition.
4. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dont les coefficients diagonaux λ_i sont supposés distincts deux à deux, et soit $M \in C(D)$.
 - (a) Interpréter les produits DM et MD en termes d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice M .
 - (b) Montrer que M est nécessairement une matrice diagonale.
 - (c) En déduire $C(D)$.

5. On s'intéresse désormais au commutant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On admet qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P D_A P^{-1} \text{ avec } D_A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Prouver que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence suivante :

$$M \in C(A) \iff P^{-1} M P \in C(D_A)$$
- (b) Peut-on appliquer les résultats de la question 4 à D_A ? Justifier.
- (c) Montrer que les éléments de $C(D_A)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ où a, b, c, d et e sont des réels.
- (d) En déduire une écriture de $C(A)$ comme combinaison linéaire de cinq matrices que l'on déterminera sous forme matricielle ou en fonctions de matrices élémentaires $E_{i,j}$.

Correction du DS n 5, sujet 2

Exercice 1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'objectif du problème est d'étudier les solutions des équations $(E_p) : \ln x + x = p$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Partie I - Étude de la suite des solutions.

1. Faisons une petite étude de fonction en posant $f(x) = \ln x + x$; elle est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et son tableau de variations est :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$+\infty$

La restriction $f_{[1, +\infty[}$ est donc une bijection sur $[1, +\infty[$ ce qui montre que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique antécédent par f , c'est-à-dire une unique solution à l'équation (E_p) . De plus, comme $x_p \geq 1$, on a $\ln(x_p) \geq 0$ donc $f(x_p) \geq x_p$ ce qui montre l'inégalité $x_p \leq p$. Par conséquent, $x_p \in [1, p]$.

On peut aussi dire que $f(1) = 1$ et $f(p) \geq p$ pour tout $p \geq 1$ donc, comme f est continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et il existe $x_p \in [1, p]$ tel que $f(x_p) = p$. De plus, f est strictement croissante donc injective. Il existe donc un unique x_p .

Attention : Le TVI ne donne que l'existence, pas l'unicité.

Dans la suite du problème, cette solution sera notée x_p . On a la figure suivante :

x	0	p	$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	$\nearrow$ x_p	$+\infty$

2. On a $f(x_{p+1}) = p+1 > f(x_p) = p$ et comme f est croissante, cela implique $x_{p+1} \geq x_p$ donc la suite (x_p) est croissante.

On a la figure suivante :

x	0	p	$p+1$	$+\infty$
$f'(x)$			+	
f	$-\infty$	$\nearrow$ x_p	$\nearrow$ x_{p+1}	$+\infty$

On peut aussi invoquer la croissance de f^{-1} .

3. (a) On sait que $x_p \leq p$ donc $0 < \frac{\ln x_p}{p} \leq \frac{\ln p}{p}$ et comme le terme de droite tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, on a $\frac{\ln x_p}{p} \rightarrow 0$ par le théorème des gendarmes. Par ailleurs, par définition de x_p , on a $\ln(x_p) + x_p = p$ donc $\frac{\ln x_p}{p} + \frac{x_p}{p} = 1$ ce qui montre que $\frac{x_p}{p}$ tend vers 1 d'où l'équivalence.

Attention, on ne sait pas si x_p tend vers $+\infty$!

- (b) On a $x_{p+1} - x_p = p+1 - \ln(x_{p+1}) - p + \ln(x_p) = 1 - \ln\left(\frac{x_{p+1}}{x_p}\right)$. Or $\frac{x_{p+1}}{x_p} \sim \frac{p+1}{p}$ d'après la question précédente donc $\frac{x_{p+1}}{x_p} \rightarrow 1$ quand p tend vers $+\infty$ et par suite, $x_{p+1} - x_p \rightarrow 1$.

Attention, beaucoup de bêtises avec notamment des somme d'équivalents (!!!!) ou encore des $\lim x_p = \lim x_{p+1}$ d'où on déduit que la limite de la différence est nulle alors que c'est, ici, une belle forme indéterminée!

4. (a) On a $x_p = p + o(p)$ donc $\ln(x_p) = \ln(p + o(p)) = \ln p + \ln(1 + o(1))$. Comme $\ln(1 + o(1)) \rightarrow 0$, on a bien $\ln(x_p) \sim \ln p$.
Attention : On ne peut pas "appliquer" une fonction à un équivalent. Contre-exemple : $p \sim p^2$ quand p tend vers 1 mais $\frac{\ln(p^2)}{\ln p} = 2 \not\rightarrow 1$.

- (b) Calculons la limite de $\frac{x_p - p + \ln p}{\ln p} = \frac{-\ln(x_p) + \ln p}{\ln p} = 1 - \frac{\ln x_p}{\ln p}$ ce qui tend vers 0 d'après la question précédente, on a donc bien $x_p - p + \ln p = o(\ln p)$.

(c)

On a :

$$\begin{aligned} y_p &= x_p - p + \ln p \\ &= -\ln(x_p) + \ln p \\ &= -\ln(p - \ln p + o(\ln p)) + \ln p \\ &= -\ln p - \ln\left(1 - \frac{\ln p}{p} + \frac{o(\ln p)}{p}\right) + \ln p \\ &= -\ln\left(1 - \frac{\ln p}{p} + \frac{o(\ln p)}{p}\right). \end{aligned}$$

Quand p tend vers $+\infty$, on a $\frac{\ln p}{p} \rightarrow 0$ et $o\left(\frac{\ln p}{p}\right) \rightarrow 0$; par conséquent

$$-\ln\left(1 - \frac{\ln p}{p} + \frac{o(\ln p)}{p}\right) \sim \frac{\ln p}{p} + \frac{o(\ln p)}{p},$$

d'où

$$-\ln\left(1 - \frac{\ln p}{p} + \frac{o(\ln p)}{p}\right) \sim \frac{\ln p}{p}$$

donc $y_p \sim \frac{\ln p}{p}$. On en déduit que $y_p = \frac{\ln p}{p} + o\left(\frac{\ln p}{p}\right)$ ce qui est précisément le résultat demandé.

Partie II - Approximation numérique de x_p .

Dans cette partie, l'entier p est fixé.

5. Montrer que $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$. On peut étudier la fonction $g : x \mapsto \ln x - x + 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée vaut $g'(x) = \frac{x-1}{x}$. La fonction atteint donc son maximum en 1. Comme $g(1) = 0$, on a $\forall x \geq 0, g(x) \leq g(1) = 0$.

On peut également invoquer la concavité de $\ln$, ça marche très bien.

On peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis. Pour tout x , il existe c_x compris entre 1 et x tel que $\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c_x}$.

Si $x \geq 1$, on a $c_x \geq 1$ donc $\frac{1}{c_x} \leq 1$ ce qui implique $\ln x \leq x - 1$ en multipliant par $x - 1$ qui est positif.

Pour $x < 1$, on a $c_x < 1$ donc $\frac{1}{c_x} > 1$. En multipliant par $x - 1$ qui est négatif, on obtient à nouveau l'inégalité souhaitée.

6. (a) Une étude de fonction immédiate montre que $x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante et a pour image $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, par conséquent, l'équation $f(x) - x = 0$ a une unique solution; comme x_p vérifie $f(x_p) = x_p$, c'est l'unique point fixe de f .

On peut aussi dire que x est un point fixe de f si et seulement si x est solution de (E_p) et conclure en utilisant la question I.1. Pensez à bien citer la question que vous utilisez.

- (b) On a $u_0 \in [1, p]$ et $f([1, p]) = [f(p), f(1)]$ puisque f est décroissante et comme $f(p) = p - \ln p \geq 1$, on a $f([1, p]) \subset [1, p]$ donc l'intervalle $[1, p]$ est stable par f . Cela montre que la suite (u_n) est bien définie et, par récurrence sur n , comme $u_0 \in [1, p]$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, p]$.

- (c) On pose $g = f \circ f$, alors g est croissante (puisque f est décroissante) et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = g(u_{2n})$. Si $u_0 \leq u_2$ alors, par croissance de g , on montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \leq u_{2n+2}$. De même, si $u_0 \geq u_2$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \geq u_{2n+2}$. Ainsi, (u_{2n}) est une suite monotone. On montre de même la monotonie de (u_{2n+1}) .

Attention, vous ne pouvez pas me dire sans justification que (u_{2n})

est monotone car $f \circ f$ est croissante, il faut parler d'une récurrence en mentionnant l'initialisation et que l'hérédité se montre par croissance de la fonction. Ces suites seront convergentes si elle sont bornées or on a montré que $u_n \in [1, p], \forall n$ par conséquent, les deux suites sont bornées et donc convergentes.

- (d) La fonction f étant continue, on a $f(u_{2n}) \rightarrow f(\alpha)$ or $f(u_{2n}) = u_{2n+1}$ donc par unicité de la limite, on a $f(\alpha) = \beta$. De même, on montre que $f(\beta) = \alpha$.

La continuité de f est indispensable.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [1, p]$, les limites α et β appartiennent également à cet intervalle.

J'ai été très étonnée du nb de personnes qui se sont noyées dans un verre d'eau pour justifier que α et β appartenaient à $[1, p]$.

- (e) On montre facilement que $h(x) = x - \ln x$ est strictement croissante donc injective. On sait que $f(\alpha) = \beta$ et $f(\beta) = \alpha$ ce qui implique $p - \ln \alpha - \beta = p - \ln \beta - \alpha$ soit $h(\alpha) = h(\beta)$. L'injectivité de h permet de conclure : $\alpha = \beta$.
- (f) On a vu que les deux suite extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite; comme $\mathbb{N}$ est la réunion des pairs et des impairs, cela implique que (u_n) converge (vers $\alpha = \beta$). Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue donc (u_n) ne peut converger que vers un point fixe de f ; comme x_p est l'unique point fixe de f , on a $u_n \rightarrow x_p$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie III : Un lemme utile

Pour deux suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit le produit de Cauchy des suites a et b , noté $a \star b$, la suite c définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

7. Dans cette question, on définit les deux suites (a_n) et (b_n) ainsi :

- ▷ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, de limite nulle.
- ▷ $a_n = (1/2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si bien que la suite $c = a \star b$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} b_{n-k}.$$

- (a) Soit un couple d'entiers naturels (n, m) tels que $n < m$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{m-1}} \\ &\leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2^k} b_{2n-k} \\ &= b_{2n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} b_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2^k} b_{2n-k} \end{aligned}$$

Pour tout $k \in [1, n]$, $2n - k \in [n, 2n - 1]$ donc $b_{2n-k} \leq b_n$ par décroissance de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, en appliquant la question précédente au couple $(0, n)$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} b_{2n-k} \leq b_n.$$

De même, pour tout $k \in [n+1, 2n]$, $2n - k \in [0, n - 1]$ donc $b_{2n-k} \leq b_0$. En appliquant la question précédente au couple $(n, 2n)$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2^k} b_{2n-k} \leq \frac{b_0}{2^n}.$$

On obtient bien

$$c_{2n} \leq b_{2n} + b_n + \frac{b_0}{2^n}$$

On procède de manière analogue pour c_{2n+1} :

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{2^k} b_{2n+1-k} \\ &= b_{2n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} b_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k} b_{2n+1-k} \\ &\leq b_{2n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k} b_0 \\ &\text{par décroissance de } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &\leq b_{2n+1} + b_{n+1} + \frac{b_0}{2^n} \\ &\text{en appliquant la question précédente aux couples } (0, n) \text{ et } (n, 2n+1) \\ &\leq b_{n+1} + \frac{b_0}{2^n} + b_{2n+1}. \end{aligned}$$

On a bien les deux inégalités demandées.

Je ne sais pas trop pourquoi mais elle vous a posé problème celle-là.

- (c) Les deux suites $(c_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont **positives** donc par le thm des gendarmes, elles sont de limite nulle.

Le seul argument manquant est positive, pas de conclusion possible sinon.

- (d) Les suites $(c_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite. On en déduit que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers cette limite.
- (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $(d \star b)_n$ le terme d'indice n de $d \star b$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par l'inégalité triangulaire,

$$|(d \star b)_n| \leq \sum_{k=0}^n \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^k b_{n-k} \right|,$$

par l'inégalité triangulaire. On a donc

$$0 \leq |(d \star b)_n| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} b_{n-k},$$

D'après la question précédente, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} b_{n-k} \rightarrow 0$ donc, par le thm des gendarmes, la suite $d \star b$ converge vers 0.

On pouvait aussi encadrer d_n entre $-c_n$ et c_n et encadrer $(d \star b)_n$ entre la somme et son opposé et conclure par le thm des gendarmes.

Partie IV : Étude d'une classe de suites

Dans cette partie, on note Ω l'ensemble des suites réelles $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

Nous allons montrer que Ω est une ensemble de suites convergentes contenant toutes les suites décroissantes - mais pas qu'elles-.

8. (a) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_{n-1}$ et $a_{n+1} \leq a_n$, on a donc

$$2a_{n+1} \leq a_n + a_{n-1},$$

d'où l'inégalité souhaitée en divisant par 2. Comme la suite est une suite réelle positive, elle appartient à Ω .

- (b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$ donc

$$2a_{n+1} > a_n + a_{n-1} \text{ puis } a_{n+1} > \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}),$$

et elle n'appartient pas à Ω .

9. Déterminons explicitement toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}),$$

Pour cela, on résout l'équation caractéristique : $2x^2 - x - 1 = 0$ qui a 1 pour racine évidente et $-\frac{1}{2}$ pour deuxième racine. Les suites vérifiant l'égalité sont donc celles de la forme $u_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2} \right)^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Jusque là, tout va bien. Si on prend $\lambda = \mu = 1$, on a $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{5}{4}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas décroissante. Par ailleurs, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien positive, elle appartient donc à Ω mais n'est pas décroissante.

Là, vous ne vérifiez pas que la suite appartient bien à Ω (donc elle doit être positive!) ET/OU vous ne justifiez pas qu'elle n'est pas décroissante.

10. Dans cette question, on se fixe une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à Ω , et d la suite définie par $d_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit enfin c telle que $c_0 = a_0$ et $c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

- (a) On remarque, tout d'abord, que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ &\leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) + \frac{1}{2}a_n \\ &\quad \text{car } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega \\ &= a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} \\ &= c_n \end{aligned}$$

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite ℓ .

- (b) On souhaite établir, pour tout entier naturel n , l'égalité $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$. On raisonne par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, on obtient $c_0 = a_0$ ce qui est vrai.

Soit maintenant un entier n tel que $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k}$$

On pose $j = k-1$, k varie de 1 à $n+1$ donc j varie de 0 à n et $k = j+1$.

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} &= c_{n+1} + \sum_{j=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{j+1} c_{n-j} \\ &= c_{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} \end{aligned}$$

car l'indice est muet

$$\begin{aligned} &= c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \\ &\quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= a_{n+1} \\ &\quad \text{en remplaçant } c_{n+1} \text{ par son expression} \end{aligned}$$

L'égalité est vraie au rang $n+1$.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n .

On peut aussi le montrer en faisant apparaître une suite télescopique.

- (c) On en déduit que $d * c = a$.

- (d) Soit ϵ la suite définie par $\epsilon_n = c_n - \ell$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite ϵ est décroissante, de limite nulle. D'après la partie III, on en déduit que la suite $d * \epsilon$ converge vers 0.

Tout le travail avait déjà été fait!

- (e) On désigne par u la suite $d * \epsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - \ell) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - \ell \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= a_n - \ell \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} \\ &\quad \text{d'après la question 3b)} \\ &= a_n - \frac{2\ell}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

On a bien l'égalité souhaitée.

- (f) La suite u converge vers 0, on en déduit que la suite a converge vers $\frac{2\ell}{3}$.

Exercice 2 Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B (appelé le commutant de la matrice B). Autrement dit :

$$C(B) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}$$

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On désire prouver quelques propriétés de $C(B)$.

- (a) On peut, par exemple, citer la matrice nulle, la matrice identité et B .
 (b) Montrons que $C(B)$ est stable par combinaisons linéaires. Soit donc $(M, N) \in C(B)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda M + N)B = \lambda MB + NB = \lambda BM + BN = B(\lambda M + N),$$

car $BN = NB$ et $BM = MB$.

- (c) Soit M et M' deux éléments de $C(B)$, alors

$$MM'B = MBM' = BMM'$$

donc le produit MM' est encore un élément de $C(B)$.

- (d) On considère une matrice de la forme $\sum_{i=0}^k a_i B^i$ avec $k \geq 0$ et $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ est un élément de $C(B)$. On sait que $B \in C(B)$ et, d'après la question précédente, on en déduit que pour tout $k \geq 0$, $B^k \in C(B)$. Par ailleurs, toute combinaison linéaire d'éléments de $C(B)$ est un élément de $C(B)$. La matrice $\sum_{i=0}^k a_i B^i$ est donc un élément de $C(B)$.

Pas besoin de faire une récurrence ici!

2. Soit M dans $C(B)$, et M inversible, montrons que son inverse M^{-1} est encore un élément de $C(B)$.

On a

$$M^{-1}B = M^{-1}BMM^{-1} = M^{-1}MBM^{-1} = I_n BM^{-1} = BM^{-1},$$

donc $M^{-1} \in C(B)$.

3. (a) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On a $B^\top \times B = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$ et $B \times B^\top = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$ donc $B^\top \times B \neq B \times B^\top$.

- (b) On a vu que $(^\top B) \notin C(B)$ pour l'exemple précédent alors que $B \in C(B)$. On en déduit que l'ensemble $C(B)$ n'est pas stable par transposition.

- (c) Soit $M \in C(B)$. On a alors $MB = BM$ donc, en prenant la transposition de cette égalité :

$$B^\top M^\top = M^\top B^\top.$$

Si B est symétrique, on a $B^\top = B$ donc $BM^\top = M^\top B$ et on a bien $M^\top \in C(B)$ ce qui montre que $C(B)$ est stable par transposition. Si B est antisymétrique, on a $B^\top = -B$ donc $-BM^\top = -M^\top B$ puis $BM^\top = M^\top B$ et on a bien $M^\top \in C(B)$ ce qui montre que $C(B)$ est stable par transposition.

4. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dont les coefficients diagonaux λ_i sont supposés distincts deux à deux, et soit $M \in C(D)$.

- (a) Le produit DM est obtenu en multipliant chaque ligne L_i de M par λ_i . Le produit MD est obtenu en multipliant chaque colonne C_i par λ_i .

- (b) Si on note $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, on a

$$\lambda_i m_{ij} = \lambda_j m_{ij}.$$

Si $i \neq j$, cela impose $m_{ij} = 0$ car les λ_i sont distincts. On a en déduit que M est nécessairement une matrice diagonale.

- (c) On a montré à la question précédente qu'un élément de $C(D)$ est nécessairement une matrice diagonale. Réciproquement, si M est une matrice diagonale, on a bien $M \in C(D)$. On en déduit que $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

5. On s'intéresse désormais au commutant de la matrice $A =$

$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. On admet qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PD_AP^{-1} \text{ avec } D_A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence suivante : Alors

$$\begin{aligned} M \in C(A) &\Leftrightarrow MA = AM \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MAP = P^{-1}AMP \text{ car } P \text{ et } P^{-1} \text{ sont inversibles} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MPP^{-1}AP = P^{-1}APP^{-1}MP \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MPD_A = D_AP^{-1}MP \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MP \in C(D_A) \end{aligned}$$

On a bien l'équivalence :

$$M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(D_A)$$

Attention, la multiplication matricielle n'est une équivalence que si on multiplie par une matrice inversible!!

On peut aussi faire par double implication pour ne pas avoir de problème.

(b) On ne peut appliquer les résultats de la question 4 à D_A car ses coefficients diagonaux ne sont pas distincts.

(c) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_3(\mathbb{R})$. On a $MD_A = D_AM \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 4m_{11} & 2m_{12} & 2m_{13} \\ 4m_{21} & 2m_{22} & 2m_{23} \\ 4m_{31} & 2m_{32} & 2m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4m_{11} & 2m_{12} & 2m_{13} \\ 4m_{21} & 2m_{22} & 2m_{23} \\ 4m_{31} & 2m_{32} & 2m_{33} \end{pmatrix} \text{ donc } MD_A = D_AM \Leftrightarrow$$

$m_{21} = m_{12} = m_{13} = m_{31} = 0$. On a bien montré que les éléments de $C(D_A)$ sont exactement les matrices

de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ où a, b, c, d et e sont des réels.

(d) D'après la question précédente, on a

$$C(D_A) = \{aE_{11} + bE_{22} + cE_{23} + dE_{32} + eE_{33}, (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5\}$$

On en déduit que

$$C(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}), P^{-1}MP \in C(D_A)\} = \{aPE_{11}P^{-1} + bPE_{22}P^{-1} + cPE_{23}P^{-1} +$$