Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
Feuille 14

TD 14: Développements limités.

1 DL et polynômes

Exercice 1.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!], P^{(k)}(0) = k! a_k$.

Exercice 2.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n à coefficients réels tel que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P^{(k)}(1) = k$.

2 Calcul de DL

Exercice 3.
Donner un DL à l'ordre 3 en zéro des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(1+x)\cos(x)$.
2. $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$.
3. $x \mapsto \sin(2x)$.
4. $x \mapsto xe^{2x+1}$.
5. $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.
6. $x \mapsto \arctan(x)$

Exercice 4.
Donner le DL en 0 à l'ordre 7 de $x \mapsto \tan(x)$.

Exercice 5.
Déterminer un DL d'ordre 3 de $x \mapsto \arctan(x^3)$ en 1.

Exercice 6.
Déterminer un DL à l'ordre 4 de $f : x \mapsto \sin(\ln(x+1)) - \ln(\sin(x)+1)$ en 0. En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0.

3 Dérivabilité

Exercice 7.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)-1}{\sin^2 x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement est-il dérivable?

Exercice 8.
Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$ est prolongeable par continuité. On note encore f son prolongement continu. Montrer qu'il est dérivable et donner $f'(0)$.

4 Calcul de limites et d'équivalents

Exercice 9.
Déterminer les limites suivantes en 0 :

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
2. $x \mapsto \dfrac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)}$.
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}$.
4. $x \mapsto \dfrac{e^x-1-\sin(x)}{\cos(x)-1}$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$.
6. $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Exercice 10.
Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}}$.

Exercice 11.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+x+1}\right)^x$.

5 Utilisation de l'unicité du DL

Exercice 12.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Déterminer la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

Exercice 13.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(\cos x)}{1+x}$ définie sur $]-1, 1[$. Déterminer $f'(0)$ et $f"(0)$.

6 Détermination de tangente et de la position de celle-ci

Exercice 14.
Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 1$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 15.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Déterminer l'équation de la tangente à f en $x = 2$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 16.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x - e^{-x}}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement.
2. Montrer que f admet un DL à l'ordre 3 en 0 que l'on calculera.
3. Montrer que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
4. Que dire de la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0?

7 DL et intégrale

Exercice 17.
Soit $h : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer un DL à l'ordre 4 en 0 de $t \mapsto \dfrac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}$.
2. En déduire un DL à l'ordre 5 en 0 de h.

Exercice 18.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

8 DL et suites

Exercice 19.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer que la suite est bien définie et déterminer sa limite.
2. Montrer que $u_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $u_n = n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

9 Fonction réciproque et équation implicite

Exercice 20.
Pour tout $\epsilon > 0$, l'équation $e^{-\epsilon x} = x$ d'inconnue x possède une unique solution x_ϵ dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $x_\epsilon =_{\epsilon\to 0} 1 - \epsilon + \dfrac{3\epsilon^2}{2} + o\left(\epsilon^2\right)$

Exercice 21.
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\mathrm{sh}(x) - x \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective et déterminer un DL4 de f^{-1} en 0

10 Développement asymptotique et asymptote

Exercice 22.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{2x^2+1}}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Donner l'équation de sa tangente en 0 et sa position relative par rapport au graphe de f.
2. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation et la position par rapport à la courbe.

Exercice 23.
Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1}e^{-1/x}$ admet une asymptote dont on précisera l'équation et la position de l'asymptote.

11 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 24.
Déterminer le DL d'ordre 6 en 0 de th.[1]

Exercice 25.
Déterminer un DL à l'ordre 6 en 0 de $\arctan(x^3)$.

Exercice 26.
Déterminer le DL3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{2 - \sqrt{1-x}}$.

Exercice 27.
Déterminer le DL3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(\ln(1+x))}$.

Exercice 28.
Déterminer le DL3 en $\dfrac{1}{2}$ de $x \mapsto \cos\left(\pi x\left(1-x\right)\right)$.

Exercice 29.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\mathrm{sh}^2(x)}$. Déterminer un DL3 en 0 de f.

Exercice 30.
Soit $f : x \mapsto \cos x^x$. Déterminer un DL4 en 0 de f.

[1] On rappelle que $\mathrm{th} = \mathrm{sh}/ch$.

Exercice 31.
Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+4\sin x}}$. Déterminer un DL3 en 0 de f.

Exercice 32.
Donner le DL en 0 à l'ordre 6 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

Exercice 33.
Donner le DL en 0 à l'ordre 5 de $x \mapsto \sin(\tan(x))$.

Exercice 34.
Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto (\ln(1+x))^2$.

Exercice 35.
Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \exp(\sin(x))$.

Exercice 36.
Donner le DL en 0 à l'ordre 9 de $x \mapsto \sin^6(x)$.

Exercice 37.
Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln(1+\cos x)$.

Exercice 38.
Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

Exercice 39.
Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\mathrm{ch} x}$.

Exercice 40.
Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $\mapsto e^{3+x^2}$.

Exercice 41.
Soit f définie par $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x}$ et $f(0)=0$, f est-elle dérivable?

Exercice 42.
Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch} x - 1}{x}$ et $f(0)=0$, f est-elle dérivable?

Exercice 43.
Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

Exercice 44.
Déterminer un équivalent de $\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} - e^{\frac{1}{2n^2}}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)}$.

Exercice 45.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\tan(x)}{\sqrt{1+2x}-\ln(1+x)-1}$.

Exercice 46.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+x^2)} - \dfrac{1}{\tan^2 x}$. Déterminer la limite en 0 de $f(x)$.

Exercice 47.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1-x}}{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}$.

Exercice 48.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - ex^2\sqrt{1-\frac{1}{x}}$.

Exercice 49.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos(x)-1)}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

Exercice 50.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x$.

Exercice 51.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\cos(x)-1}$.

Exercice 52.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}\right)$.

Exercice 53.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.

Exercice 54.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\arcsin x - \arctan x}$.

Exercice 55.
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(\sin(x)) - \mathrm{ch}(x)}{(\sin(x))^4}$.

Exercice 56.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$.

Exercice 57.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (\cos(x)+x)}{x^2}$.

Exercice 58.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x}$.

Exercice 59.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln(x)}$.

Exercice 60.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}$.

Exercice 61.
Calculer le DL à l'ordre 1 en 0 de f définie par $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \dfrac{3}{2}$. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

Exercice 62.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)-1}{\sin^2 x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement est-il dérivable?

Exercice 63.
Calculer le DL à l'ordre 1 en 0 de f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$. En déduire que f est dérivable et donner $f'(0)$.

Exercice 64.
Soit $f : x \mapsto e^{\cos x}$. Déterminer l'équation de la tangente à f en $x = 0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 65.
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{3+\sin x}$. Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 66.
Soit $f : x \mapsto x + \sin x$. Montrer que f est bijective et déterminer un DL3 en 0 de f^{-1}.

12 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 67.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 68.
On considère la fonction f définie par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$, $\forall x > 0$ et $f(0) = 0$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer un DL à l'ordre 3 de f en 1.
3. Que peut-on en déduire sur le graphe de f?

Exercice 69.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.
3. Montrer que la suite converge vers 1.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que $y_n \sim -\dfrac{\ln(y_n)}{n}$ puis que $-\ln(y_n) \sim \ln(n)$.
5. En déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 70.
Montrer que la fonction $x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de celle-ci par rapport au graphe de f.

Exercice 71.
Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ de $x \mapsto \arctan\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$.

Exercice 72.
On considère la fonction $x \mapsto x \arctan \dfrac{x}{x-1}$. On souhaite montrer qu'elle admet une asymptote en $-\infty$ et déterminer une équation de cette asymptote.

1. Déterminer un DL à l'ordre 2 de $\tan\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$ en 0.
2. En déduire un développement limité à l'ordre 1 en 0 de $\arctan(X+1)$.
3. Déterminer l'équation de l'asymptote en $-\infty$ de la fonction.
4. Quelle est la position de l'asymptote par rapport au graphe de la fonction?

Memo

- Comment déterminer un développement limité?
  - Utiliser les développements limités usuels
  - Intégrer un développement limité en n'oubliant pas de déterminer la constante d'intégration (pour les rares cas où elle n'est pas nulle)
- Comment déterminer le développement limité d'un quotient?
  Se ramener à un produit en faisant apparaître un quotient de la forme $\dfrac{1}{1+X}$ avec $X \to 0$.
- Comment déterminer une limite?
  Déterminer un équivalent ou un DL
- Comment déterminer la position relative du graphe par rapport à la tangente/asymptote? Étudier le signe du premier coefficient non nul d'ordre $k \geqslant 2$ du développement limité (ou du développement asymptotique dans le cas d'une asymptote).
- Comment déterminer un DL de f^{-1} quand on n'a pas l'expression? intégrer un DL de la dérivée, identifier les coefficients du DL de $f \circ f^{-1}$ ou utiliser un DL de f puis un changement de variable