Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 6

Devoir d'entrainement 6.

Exercice 1 (commun)**.**
Trois joueurs A, B et C s'affrontent au Paintball. Le jeu se déroule en une succession d'affrontements de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois joueurs :

— Tous les tirs du tournoi se passent de la même manière et de façons mutuellement indépendantes.
— Lorsque le joueur A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.
— Lorsque le joueur B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/2.
— Lorsque le joueur C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.
— Lorsque l'un des joueurs est touché, il est définitivement éliminé des affrontements suivants.
— À chaque affrontement, les joueurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés (ainsi, lors du premier affrontement, A vise B tandis que B et C visent A).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les évènements suivants :

— ABC_n : " A l'issue du n$^{\text{ème}}$ affrontement, A, B et C ne sont pas encore éliminés. "
— AB_n : " A l'issue du n$^{\text{ème}}$ affrontement, seuls A et B ne sont pas encore éliminés. "
(On définit de façon analogue BC_n et AC_n)
— A_n : " A l'issue du n$^{\text{ème}}$ affrontement, seul A n'est pas encore éliminé "
(On définit de façon analogue B_n et C_n)
— 0_n : " A l'issue du n$^{\text{ème}}$ affrontement, A, B et C sont éliminés "

On remarquera que ABC_0 est l'évènement certain, et AB_0, AC_0, BC_0, A_0, B_0, C_0 et 0_0 l'évènement impossible $\varnothing$.

PARTIE I : Le premier affrontement

On désigne par R_A (respectivement R_B et R_C) l'évènement : " A (respectivement B et C) réussit son premier tir ".

1. Calculer $P(R_B \cup R_C)$.
2. (a) Montrer que la probabilité pour qu'au premier affrontement " A rate son tir " et " B ou C réussissent leur tir " est égale à 2/9.

   (b) Déterminer de même la probabilité pour qu'au premier affrontement " A réussisse son tir " et " B ou C réussissent leur tir ".

PARTIE II : Probabilités conditionnelles

3. (a) Montrer que $(ABC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $ABC_{n+1} \subset ABC_n$

   (b) En est-il de même des suites $(BC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(AC_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   (c) Expliquer pourquoi C ne peut pas être le premier à être éliminé. En déduire $P(AB_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Justifier que $P_{ABC_n}(ABC_{n+1}) = 1/9$

   (b) Compléter le tableau suivant :

V	0_{n+1}	A_{n+1}	B_{n+1}	C_{n+1}	AB_{n+1}	BC_{n+1}	AC_{n+1}	ABC_{n+1}
$P_{ABC_n}(V)$								
$P_{AC_n}(V)$								
$P_{BC_n}(V)$								

   (c) Expliquer en quoi ce tableau permet de vérifier la cohérence de vos résultats.

PARTIE III : Suite du tournoi

5. Pour tout n$\in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'évènement : "le tournoi n'est pas terminé à l'issue du n$^{\text{ème}}$ affrontement".

   (a) Calculer $P(U_1)$

   (b) i. Pour $n \geqslant 1$, calculer $P(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ldots \cap ABC_n)$.

   ii. En déduire à l'aide de la question 3 la valeur de $P(ABC_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Pour $n \geqslant 1$, on pose
   — $E_{0,n} = AC_1 \cap AC_2 \cap \ldots \cap AC_n$ et
   — $\forall k \in [[1, n-1]]$,
   $E_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ldots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap AC_{k+2} \cap \ldots \cap AC_n$

   (d) i. Calculer $P(E_{k,n})$, $\forall k \in [[0, n-1]]$ et $n \geqslant 1$.

   ii. Exprimer AC_n en fonction des $E_{k,n}$ pour $k \in [[0, n-1]]$ et $n \geqslant 1$.

   iii. En déduire que $P(AC_n) = 2\left(\left(\dfrac{2}{9}\right)^n - \left(\dfrac{1}{9}\right)^n\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la question 5(b)ii

   (e) Pour $n \geqslant 1$, on pose maintenant
   — $F_{0,n} = BC_1 \cap BC_2 \cap \ldots \cap BC_n$ et
   — $\forall k \in [[1, n-1]]$,
   $F_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap ... \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap BC_{k+2} \cap \ldots \cap BC_n$

   i. Calculer $P(F_{k,n})$, pour tout $k \in [[0, n-1]]$ et $n \geqslant 1$.

   ii. En déduire $P(BC_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (f) À l'aide des questions 5(b)ii, 5(d)iii et 5(e)ii, en déduire que

$$\forall n \geqslant 1, P(U_n) = (1/3)^n + 2\left((2/9)^n - (1/9)^n\right).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $GA(n)$ l'évènement : "A gagne le tournoi à l'issue du n$^{\text{ème}}$ affrontement".

7. (a) calculer $P(GA(1))$.

(b) Pour tout $n \geqslant 2$, exprimer $GA(n)$ en fonction de AC_{n-1} et de A_n.
En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(GA(n)) = 4(2/9)^n \left(1-(1/2)^{n-1}\right)$$

8. (a) En s'inspirant de ce qui précède calculer, pour tout n$\in \mathbb{N}^*$, la probabilité que B gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement.

   (b) Déterminer enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que C gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement.

Exercice 2 (sujet 2)**.**

Pour tous réels $a < b$, une *subdivision* de $[a,b]$ est une liste de réels du type $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, où n est un entier naturel supérieur à 2 quelconque, et

$$a = s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n = b.$$

On notera $\mathscr{S}(a,b)$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. Pour toute subdivision $s \in \mathscr{S}(a,b)$, on note $\ell(s)$ la longueur de s, de sorte qu'on a toujours :

$$\ell(s) \geqslant 2\ ,\ \ s = (s_1, s_2, \ldots, s_{\ell(s)})\ ,\ \ s_1 = a \ \text{ et } \ s_{\ell(s)} = b$$

Si f est une fonction réelle définie sur $[a,b]$ et $s \in \mathscr{S}(a,b)$, on appelle *variation de f selon s* et on note $v_f(s)$ le nombre :

$$v_f(s) = \sum_{i=2}^{\ell(s)} \left|f(s_i) - f(s_{i-1})\right|$$

Si l'ensemble
$$\mathscr{A}_f(a,b) = \left\{v_f(s)\ \mid\ s \in \mathscr{S}(a,b)\right\}$$
est majoré, on dit que f est à *variation bornée sur* $[a,b]$, et on définit la *variation de f sur* $[a,b]$ comme étant le nombre
$$V_f(a,b) = \sup\left(\mathscr{A}_f(a,b)\right).$$

Le principal objectif de cet exercice est de montrer l'équivalence (E) suivante, pour tous réels $a < b$ et toute fonction réelle définie sur $[a,b]$:

$$f \text{ est à variation bornée sur } [a,b] \underset{(E)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{c} f \text{ est la somme d'une fonction} \\ \text{croissante et d'une fonction décroissante} \end{array}\right)$$

Dans toute la suite, on fixe $a < b$ deux réels.

1. **Sur les fonctions monotones.**
   (a) Montrer qu'une fonction croissante sur $[a,b]$ est à variation bornée sur $[a,b]$, et déterminer ce que vaut sa variation sur $[a,b]$.
   (b) Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante (sur $[a,b]$) est à variation bornée sur $[a,b]$.
2. **Sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.** Dans cette question, on considère une fonction $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que f' est bornée sur $[a,b]$.
   (b) En déduire que f est à variation bornée sur $[a,b]$.

3. **Preuve de l'équivalence** (E)**.** Soit f une fonction à variation bornée sur $[a,b]$.
   (a) Justifier que de façon générale, si $\mathscr{B}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée et M est un réel, on a l'équivalence :
   $$\sup(\mathscr{B}) \leqslant M \iff \left(\forall b \in \mathscr{B},\ b \leqslant M\right)$$
   (b) Montrer que f est à variation bornée sur tout segment $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$, et qu'on a :
   $$V_f(c,d) \leqslant V_f(a,b)$$
   (c) Soit $x<y<z$ trois réels de $[a,b]$. Établir la relation de Chasles :
   $$V_f(x,z) = V_f(x,y) + V_f(y,z)$$
   On pourra, pour montrer l'égalité, démontrer séparément les inégalités $\leqslant$ et $\geqslant$, à l'aide de la question 3a.
   (d) Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(x) = V_f(a,x)$. Montrer que les fonctions g et $g-f$ sont toutes les deux croissantes.
   (e) Conclure sur l'équivalence (E).
4. **Variation d'une fonction continue.** L'objectif de cette question est de montrer qu'une fonction continue sur un segment peut ne pas être à variation bornée sur ce segment. On pose pour cela la fonction f définie sur $[0,1]$ par :
   $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   (a) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
   (b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n\pi}$. Montrer, pour tout $n \geqslant 2$:
   $$\sum_{k=2}^{n} \left|f(u_k) - f(u_{k-1})\right| \geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
   (c) A l'aide d'une minoration simple, montrer : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \to_{n\to+\infty} +\infty$
   (d) Conclure.

Exercice 3. *(sujet 1)*
Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.
1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1. On note encore f son prolongement continu.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et donnez l'équation de la tangente en $x=1$.
3. Quelle est la position locale de la tangente par rapport au graphe de la courbe ?

Exercice 4 ((sujet 1))**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer que :
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \exists x_k \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[, \frac{1}{n} f'(x_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$
2. Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ et :
$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n.$$

1. On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+x} \end{array} \right.$
   (a) Montrer que f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ avec $k < 1$. On précisera la valeur de k.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}_+$, que l'on déterminera.
   (c) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$.
      ii. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Correction du devoir d'entrainement n 6

Exercice 1 1. On a :

$$P(R_B \cup R_C) = P(R_B) + P(R_C) - P(R_B \cap R_C) = P(R_B) + P(R_C) - P(R_B)P(R_C)$$

car les évènements sont indépendants. On a donc

$$P(R_B \cup R_C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Il est impératif de dire que les évènements sont indépendants pour justifier le passage "proba de l'intersection" à "produit des probas"

2. (a) On cherche à calculer $P\left(\overline{R}_A \cap (R_B \cup R_C)\right)$. À nouveau, les évènements sont indépendants donc

$$P\left(\overline{R}_A \cap (R_B \cup R_C)\right) = P\left(\overline{R}_A\right) P\left(R_B \cup R_C\right) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

On retrouve bien le résultat demandé.

(b) On cherche à calculer $P\left(R_A \cap (R_B \cup R_C)\right)$. On utilise, à nouveau, le fait que les évènements sont indépendants. On obtient :

$$P\left(R_A \cap (R_B \cup R_C)\right) = P\left(R_A\right) P\left(\cap (R_B \cup R_C)\right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

La probabilité recherchée est $\frac{4}{9}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si ABC_{n+1} est réalisé, aucun des trois joueurs n'a été éliminés au $(n+1)$-ième affrontements, ce qui signifie qu'aucun des trois joueurs n'étaient éliminés au n-ième tour donc l'évènement ABC_n est réalisé. On a donc bien $ABC_{n+1} \subset ABC_n$, la suite est donc décroissante.

Attention!!! Montrer que $P(ABC_{n+1}) \leqslant P(ABC_n)$ ne garantit pas l'inclusion, on a seulement l'implication dans l'autre sens.

(b) La situation est différente pour les suites $(BC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(AC_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, si deux joueurs ne sont pas éliminés au $(n+1)$-ième tour, cela ne signifie pas qu'ils n'étaient pas trois au tour précédent. On n'a donc pas nécessairement $BC_{n+1} \subset BC_n$, on ne peut rien dire de la monotonie de ces suites.

(c) On sait que tant que les trois joueurs sont actifs, A tire sur B et B tire sur A donc, a priori, C ne peut être éliminé [1]. On a donc $P(AB_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

4. (a) On suppose que ABC_n est réalisé, alors la probabilité que ABC_{n+1} soit réalisé est égale à la probabilité que les trois joueurs ratent leur tir. On a donc

$$P_{ABC_n}(ABC_{n+1}) = P(\overline{R}_A \cap \overline{R}_B \cap \overline{R}_C).$$

Les évènements $\overline{R_A}, \overline{R_B}$ et $\overline{R_C}$ sont indépendants car R_A, R_B et R_C le sont donc

$$P(\overline{R}_A \cap \overline{R}_B \cap \overline{R}_C) = P(\overline{R}_A)P(\overline{R}_B)P(\overline{R}_C = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

On a donc bien $P_{ABC_n}(ABC_{n+1}) = \frac{1}{9}$.

1. bon, là on pourrait se demander si C ne peut pas être atteint par un joueur qui ne le vise pas et rate son tir mais visiblement, celui qui a conçu le problème n'a pas envisagé cette possibilité :-)

(b) On calcule les différentes probabilités.

• On a vu, à la question 3c, que le joueur C ne peut pas être le premier à être éliminé, on en déduit que

$$P_{ABC_n}(0_n) = P_{ABC_n}(A_n) = P_{ABC_n}(B_n) = P_{ABC_n}(AB_n) = 0.$$

Calculons $P_{ABC_n}(C_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de l'évènement $R_A \cap (R_B \cup R_C)$. Nous avons déjà calculé cette probabilité, elle vaut

$$P_{ABC_n}(C_{n+1}) = \frac{4}{9}.$$

Pour calculer la probabilité $P_{ABC_n}(BC_{n+1})$, il faut calculer la probabilité de l'évènement $\overline{R_A} \cap (R_B \cap R_C)$ et, à nouveau, on a déjà calculé cette probabilité, elle vaut

$$P_{ABC_n}(BC_{n+1}) = \frac{2}{9}.$$

Pour calculer la probabilité $P_{ABC_n}(AC_{n+1})$, il faut calculer la probabilité de l'évènement $R_A \cap \overline{R}_B \cap \overline{R}_C$. Les évènements étant indépendants, on a

$$P_{ABC_n}(AC_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

On peut ainsi remplir la première ligne du tableau.

• On veut maintenant calculer la probabilité sachant AC_n. Si seuls A et C sont encore en jeu, toutes probabilités impliquant la présence de B au $n+1$-ième tour sont nulles donc

$$P_{AC_n}(B_{n+1}) = P_{AC_n}(AB_{n+1}) = P_{AC_n}(BC_{n+1}) = P_{AC_n}(ABC_{n+1}) = 0.$$

Calculons la probabilité $P_{AC_n}(0_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $R_A \cap R_C$ et, comme les évènement sont indépendants, on a

$$P_{AC_n}(0_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Calculons la probabilité $P_{AC_n}(A_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $R_A \cap \overline{R}_C$ et, comme les évènement sont indépendants, on a

$$P_{AC_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Calculons la probabilité $P_{AC_n}(C_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $\overline{R}_A \cap R_C$ et, comme les évènement sont indépendants, on a

$$P_{AC_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Enfin, pour calculer $P_{AC_n}(AC_{n+1})$, on calcule la probabilité de $\overline{R_A} \cap \overline{R_C}$. On a donc

$$P_{AC_n}(AC_{n+1}) = \frac{2}{9}.$$

• On veut maintenant calculer la probabilité sachant BC_n. Si seuls B et C sont encore en jeu, toutes probabilités impliquant la présence de A au $n+1$-ième tour sont nulles donc

$$P_{BC_n}(A_{n+1}) = P_{BC_n}(AB_{n+1}) = P_{BC_n}(AC_{n+1}) = P_{AC_n}(ABC_{n+1}) = 0.$$

Calculons la probabilité $P_{BC_n}(0_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $R_B \cap R_C$ et, comme les évènement sont indépendants, on a

$$P_{BC_n}(0_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Calculons la probabilité $P_{BC_n}(B_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $R_B \cap \overline{R}_C$ et, comme les évènement sont indépendants, on a

$$P_{BC_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Calculons la probabilité $P_{BC_n}(C_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $\overline{R}_B \cap R_C$ et, comme les évènement sont indépendants, on a

$$P_{BC_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, pour calculer $P_{BC_n}(BC_{n+1})$, on calcule la probabilité de $\overline{R_B} \cap \overline{R_C}$. On a donc

$$P_{BC_n}(BC_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

On a donc le tableau suivant :

V	0_{n+1}	A_{n+1}	B_{n+1}	C_{n+1}	AB_{n+1}	BC_{n+1}	AC_{n+1}	ABC_{n+1}
$P_{ABC_n}(V)$	0	0	0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
$P_{AC_n}(V)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$	0
$P_{BC_n}(V)$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0

(c) On remarque que la somme sur chaque ligne donne 1, ce qui montre que les résultats que nous avons trouvés sont cohérents car l'ensemble des événements des différentes colonnes forme un système complet d'événements.

5. (a) On sait que A tire sur B et les deux autres tirent sur A. Le tournoi sera donc terminé si seul C reste en jeu. La probabilité pour que le tournoi soit terminé est donc égale à la probabilité pour que A et B soient éliminés ce qui correspond à la probabilité $P(C_1) = P_{ABC_0}(C_1) = \frac{4}{9}$.

   On en déduit que $P(U_1) = 1 - P_{ABC_0}(C_1) = \frac{5}{9}$

   (b) i. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} &P\left(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ldots \cap ABC_n\right) \\ &= P(ABC_1)P_{ABC_1}(ABC_2)\ldots P_{ABC_1\cap\ldots\cap ABC_{n-1}}(ABC_n). \end{aligned}$$

   On a $P(ABC_1) = P\left(\overline{R}_A \cap \overline{R}_b \cap \overline{R}_C\right) = \frac{1}{9}$ et $P_{ABC_1\cap\ldots\cap ABC_{k-1}}(ABC_k) = P_{ABC_{k-1}}(ABC_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Toutes les probabilités conditionnelles sont donc égales, d'après le tableau, à $\frac{1}{9}$.

On a donc :

$$P\left(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ldots \cap ABC_n\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

C'est là qu'on commencé les formules folkloriques avec des produits de probas qui ne correspondent ni à la formule des probas composées, ni à celle du produit des probas d'événements indépendants (on ne sait pas du tout si les ABC_k le sont et, de fait, ils ne le sont pas!!!

ii. On a vu à la question 3 que la suite $(ABC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On a donc

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ldots \cap ABC_n = ABC_n.$$

On a donc $P(ABC_n) = \dfrac{1}{9^n}$.

(c) question à beaucoup de points :-)

(d) i. On applique, à nouveau, la formule des probabilités totales.

$$P(E_{0,n}) = P(AC_1).P_{AC_1}(AC_2)\ldots P_{AC_1\cap\ldots\cap AC_{n-1}}(AC_n).$$

On a $P(AC_1) = P(R_A \cap \overline{R}_B \cap \overline{R}_C) = \dfrac{2}{9}$. Les probabilités conditionnelles suivantes correspondent à $P_{AC_n}(AC_{n+1}) = \dfrac{2}{9}$.

On a donc

$$P(E_{0,n}) = \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
& P(E_{k,n}) \\
= \; & P(ABC_1).P_{ABC_1}(ABC_2)\ldots P_{ABC_1\cap\ldots\cap ABC_{k-1}}(ABC_k)P_{ABC_1\cap\ldots\cap ABC_k}(AC_{k+1})\ldots \\
& \qquad \ldots P_{ABC_1\cap\ldots\cap ABC_k\cap AC_{k+1}\cap\ldots\cap AC_{n-1}}(AC_n) \\
= \; & \underbrace{P(ABC_1).P_{ABC_1}(ABC_2)\ldots P_{ABC_{k-1}}(ABC_k)}_{\frac{1}{9}\times\ldots\times\frac{1}{9}}\underbrace{P_{ABC_k}(AC_{k+1})\ldots P_{AC_{n-1}}(AC_n)}_{\frac{2}{9}\times\ldots\times\frac{2}{9}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}$$

Cette formule étant valable pour $k = 0$ d'après le calcul fait au début de la question, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], P(E_{k,n}) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}.$$

ii. Si à l'issue du n-ième affrontement, il ne reste que A et C, cela signifie que B a été éliminé au cours d'un des affrontements précédents. On a donc :

$$AC_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_{k,n}.$$

iii. Les évènements étant incompatibles, on en déduit que la réunion est disjointe donc :

$$\begin{aligned}
P(E_{kn}) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}\\
&= \left(\frac{2}{9}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\frac{9}{2}\right)^k\\
&= \left(\frac{2}{9}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \left(\frac{2}{9}\right)^n\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{2}{9}\right)^n\times 2\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\\
&= 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat donné dans l'énoncé.

(e) i. On procède comme dans la question précédente.
On a

$$F_{0,n} = BC_1\cap\ldots\cap BC_n.$$

On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(F_{0,n}) &= P(BC_1)P_{BC_1}(BC_2)\ldots P_{BC_1\cap\ldots\cap BC_{n-1}}(BC_n)\\
&= P(BC_1)P_{BC_1}(BC_2)\ldots P_{\cap BC_{n-1}}(BC_n)\\
&= \frac{2}{9}\times\frac{1}{3}\times\ldots\frac{1}{3}\\
&= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Pour $k\in[[1,n-1]]$, on a :

$$\begin{aligned}
&P(F_{k,n})\\
=\;& P(ABC_1)P_{ABC_1}(ABC_2)\ldots P_{ABC_1\cap\ldots\cap ABC_{k-1}}(ABC_k)P_{ABC_1\cap\ldots\cap ABC_k}(BC_{k+1})\ldots\\
&\qquad\ldots P_{ABC_1\cap\ldots\cap ABC_k\cap BC_{k+1}\ldots BC_{n-1}}(BC_n)\\
=\;& P(ABC_1)P_{ABC_1}(ABC_2)\ldots P_{\cap ABC_{k-1}}(ABC_k)P_{ABC_k}(BC_{k+1})\ldots.P_{BC_{n-1}}(BC_n)\\
=\;& \frac{1}{9}\times\ldots\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}\times\ldots\frac{1}{3}\\
=\;& \frac{2}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}.
\end{aligned}$$

À nouveau, on se rend compte que cette formule est valable pour $k\in[[0,n-1]]$.

ii. On écrit $BC_n=\bigcup_{k=0}^{n-1}F_{k,n}$. Les évènements sont incompatibles donc

$$\begin{aligned}
P(BC_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}\\
&= \frac{2}{9}.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{-k}\\
&= \frac{2}{9}.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k\\
&= \frac{2}{9}.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}\\
&= \frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{3^n}-\frac{1}{9^n}
\end{aligned}$$

(f) On remarque que le tournoi n'est pas terminé à l'issue du n-ième affrontement s'il reste deux ou trois joueurs encore en jeu. On sait que C ne peut être le premier éliminé, on a donc

$$U_n = ABC_n \cup BC_n \cup AC_n.$$

Les évènements sont incompatibles, la probabilité de U_n est donc la somme des probabilités. En utilisant les résultats des questions précédentes, on obtient :

$$P(u_n) = \frac{1}{9^n} + 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right) + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n} = 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right) + \frac{1}{3^n},$$

ce qui est précisément le résultat donné dans l'énoncé.

6. question bonus

7. (a) "GA(1)" est réalisé si B et C sont éliminés au cours du premier affrontement ce qui est impossible car personne ne tire sur C. On a donc $P(GA(1)) = 0$.

(b) On sait que C ne peut être le premier éliminé donc si A gagne, cela signifie qu'il était seuls avec C au tour précédent et qu'il a éliminé C. Autrement dit,

$$GA(n) = AC_{n-1} \cap A_n.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
P(GA(n)) &= P(AC_{n-1})P_{AC_{n-1}}(A_n) = 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) \times \frac{4}{9} \\
&= \frac{8}{9}\left(\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) \\
&= 4\left(\frac{2}{9}\right)^n - 8\left(\frac{1}{9}\right)^n \\
&= 4\left(\frac{2}{9}\right)^n\left(1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
&= 4\left(\frac{2}{9}\right)^n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

On retrouve la probabilité donnée dans l'énoncé.

8. (a) On procède de même en remarquant que si B gagne, il était seul avec C au tour précédent. On a donc :

$$\begin{aligned}
P(GB(n)) &= P(BC_{n-1})P_{BC_{n-1}}(B_n) = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) \times \frac{1}{3} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{9}\right)^n
\end{aligned}$$

La probabilité que B gagne le tournoi à l'issue du n-ième affrontement est

$$P(GB(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

(b) Pour ce qui est de l'évènement $GC(n)$, il y a plusieurs cas possibles. En effet, C peut gagner après avoir été seul avec A ou B ou bien, il peut gagner alors que les trois joueurs était encore présents et A et B se sont touchés mutuellement.

Autrement dit $GC(n) = (ABC_{n-1} \cap C_n) \cup (AC_{n-1} \cap C_n) \cup (BC_{n-1} \cap C_n)$. Les évènements sont incompatibles, on a donc

$$\begin{aligned}
& P(GC(n)) \\
= \;& P(ABC_{n-1})P_{ABC_{n-1}}(C_n) + P(BC_{n-1})P_{BC_{n-1}}(C_n) + P(AC_{n-1})P_{AC_{n-1}}(C_n) \\
= \;& \frac{4}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{9} \times 2\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) \\
= \;& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n
\end{aligned}$$

La probabilité que C gagne le tournoi à l'issue du $n$ième affrontement est

$$P(GC(n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^n+\left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

On vérifie que pour $n=1$, on obtient $\frac{4}{9}$ qui correspond à la probabilité $P_{ABC_0}(C_1)$.

Exercice 2 1. **Sur les fonctions monotones.**

(a) Soit f une fonction croissante sur $[a,b]$. Soit $s\in\mathscr{S}(a,b)$. On a :

$$\begin{aligned}
v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)}\left|f(s_i)-f(s_{i-1})\right| \\
&= \sum_{i=2}^{\ell(s)} f(s_i)-f(s_{i-1}) \qquad \text{(car pour tout } i,\ f(s_i)\geqslant f(s_{i-1})\text{, par croissance)} \\
&= f(s_{\ell(s)})-f(s_1) \qquad \text{(par télescopage)} \\
&= f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s\in\mathscr{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathscr{A}_f(a,b)$ est l'ensemble à un seul élément : $\mathscr{A}_f(a,b)=\{f(b)-f(a)\}$. Il est donc bien majoré (f est donc à variation bornée), et sa borne supérieure vaut :

$$\boxed{V_f(a,b)=f(b)-f(a)}$$

Certains ont majoré (pour cette question ou une autre) chaque terme de la somme par $(b-a)$ et ont donc écrit

$$v_f(s)\leqslant(l(s)-1)(b-a).$$

C'est vrai mais cela ne permet pas de conclure que $v_f(s)$ est majorée car votre majorant dépend de $l(s)$ qui peut tendre vers l'infini

(b) Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ de la forme $f=g-h$, où g et h sont deux fonctions croissantes sur $[a,b]$. On a alors pour tout $s\in\mathscr{S}(a,b)$:

$$\begin{aligned}
v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)}\left|f(s_i)-f(s_{i-1})\right| \\
&= \sum_{i=2}^{\ell(s)}\left|\big(g(s_i)-g(s_{i-1})\big)-\big(h(s_i)-h(s_{i-1})\big)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=2}^{\ell(s)}\left|g(s_i)-g(s_{i-1})\right|+\sum_{i=2}^{\ell(s)}|h(s_i)-h(s_{i-1})| \qquad \text{(ineg. triang. et lin. de la somme)} \\
&\leqslant g(b)-g(a)+h(b)-h(a) \qquad \text{(question précédente)}
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s\in\mathscr{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathscr{A}_f(a,b)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$.

Attention, la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante n'est pas monotone!!

2. **Sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.**

(a) $f\in\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ donc par définition, f' est continue sur $[a,b]$, qui est un segment de $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de continuité sur un segment, f' est bornée sur $[a,b]$.

(b) Voici deux méthodes possibles.

- **Méthode 1.** Soit $M \geqslant 0$ un majorant de $|f'|$. Par l'inégalité des accroissements finis, on sait que f est M-lispschitzienne sur $[a,b]$. Donc pour tout $s \in \mathscr{S}(a,b)$:

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &\leqslant \sum_{i=2}^{\ell(s)} M|s_i - s_{i-1}| \qquad (f \text{ est } M\text{-lispschitzienne}) \\ &\leqslant M \sum_{i=2}^{\ell(s)} s_i - s_{i-1} \qquad (\text{pour tout } i,\ s_i \geqslant s_{i-1}) \\ &\leqslant M(b-a) \qquad (\text{par télescopage}) \end{aligned}$$

  Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathscr{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathscr{A}_f(a,b)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$.
- **Méthode 2.** Pour tout $s \in \mathscr{S}(a,b)$:

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} \left| \int_{s_{i-1}}^{s_i} f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \qquad (\text{formule du crochet}) \\ &\leqslant \sum_{i=2}^{\ell(s)} \int_{s_{i-1}}^{s_i} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \qquad (\text{ineg. triangulaire}) \\ &\leqslant \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \qquad (\text{relation de Chasles}) \end{aligned}$$

  Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathscr{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathscr{A}_f(a,b)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$.

Certains m'ont dit que f bornée impliquait f à variations bornées ce qui est évidemment faux puisque toute fonction continue sur un segment est bornée (et que vous montrez à la fin qu'une fonction peut être continue mais pas à variations bornées). C'est un exemple d'interprétation de la définition de "variation bornée" : n'interprétez pas les définitions données, collez à ce qui vous est donné.

3. **Preuve de l'équivalence** (E)**.**

   (a) Fixons $\mathscr{B}$ une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.
   L'implication $(\Rightarrow)$ est claire, car si $\sup(\mathscr{B}) \leqslant M$, alors pour tout $b \in \mathscr{B}$ on a :

$$b \leqslant \sup(\mathscr{B}) \leqslant M$$

   Réciproquement, supposons que pour tout $b \in \mathscr{B}$, $b \leqslant M$. Alors M est un majorant de $\mathscr{B}$. Or, $\sup(\mathscr{B})$ est par définition le plus petit des majorants de $\mathscr{B}$. Donc $\sup(\mathscr{B}) \leqslant M$.
   L'équivalence est montrée.

   Remarque : pour la réciproque, on pouvait aussi utiliser le fait qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{B}$ telle que $b_n \to_{n\to+\infty} \sup(\mathscr{B})$. Dans ce cas, le passage à la limite $n \to +\infty$ dans l'inégalité large $b_n \leqslant M$ donne $\sup(\mathscr{B}) \leqslant M$. La question n'était pas très difficile mais vous l'avez souvent rédigé comme des sagouins, vous avez donc perdu des points.

   (b) Soit c, d deux réels tels que $a \leqslant c < d \leqslant b$. Soit $s \in \mathscr{S}(c,d)$ une subdivision de $[c,d]$. Notons $n := \ell(s)$, de sorte que $s = (c = s_1, \ldots, s_n = d)$. Formons alors une subdivision t de $\mathscr{S}(a,b)$ de la façon suivante :

- $t_1 := a$
- $t_2 := s_1$, $t_3 := s_2$, etc jusqu'à $t_{n+1} := s_n$, ou autrement dit pour tout $i \in [\![2, n+1]\!]$, $t_i := s_{i-1}$
- $t_{n+2} := b$

On a alors :

$$\begin{aligned}
v_f(s) &= \sum_{i=2}^{n} \left| f(s_i) - f(s_{i-1}) \right| \\
&= \sum_{k=3}^{n+1} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| && \text{(chgt d'indice } k = i+1) \\
&\leqslant \sum_{k=2}^{n+2} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right| && \text{(rajout de 2 termes positifs)} \\
&\leqslant v_f(t) \\
&\leqslant V_f(a, b)
\end{aligned}$$

Cette majoration (par une constante) étant vraie pour toute subdivision $s \in \mathscr{S}(c, d)$, cela prouve que l'ensemble $\mathscr{A}_f(c, d)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[c, d]$.

De plus, puisque tous les éléments de $\mathscr{A}_f(c, d)$ sont inférieurs au réel $V_f(a, b)$, on a par la question précédente que la borne supérieure de $\mathscr{A}_f(c, d)$ est elle-même inférieure à $V_f(a, b)$. Autrement dit : $V_f(c, d) \leqslant V_f(a, b)$. Beaucoup d'entre vous m'ont écrit $A_f([c, d]) \subset A_f([a, b])$ car $[c, d] \subset [a, b]$. Là encore, c'est une interprétation erronée des définitions données.

(c) ► Montrons l'inégalité $V_f(x, z) \leqslant V_f(x, y) + V_f(y, z)$.
Soit $s \in \mathscr{S}(x, z)$, mettons $s = (s_1, \dots, s_n)$, avec $s_1 = x$ et $s_n = z$. Comme $y \in]x, z[$, il existe un indice $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $s_{p-1} \leqslant y \leqslant s_p$. On pose alors deux subdivisions :

$$t = (s_1, \dots, s_{p-1}, y) \in \mathscr{S}(x, y)$$

et

$$u = (y, s_p, \dots, s_n) \in \mathscr{S}(y, z)$$

A la jonction des deux subdivisions, on a par inégalité triangulaire :

$$\left| f(s_p) - f(s_{p-1}) \right| \leqslant \left| f(s_p) - f(y) \right| + \left| f(y) - f(s_{p-1}) \right|$$

Donc en ajoutant de part et d'autre de l'inégalité les termes $\left| f(s_i) - f(s_{i-1}) \right|$ pour $i \in [\![2, n]\!] \setminus \{p\}$, on obtient :

$$v_f(s) \leqslant v_f(t) + v_f(u)$$

Or, $v_f(t) \leqslant V_f(x, y)$ et $v_f(u) \leqslant V_f(y, z)$. Donc :

$$v_f(s) \leqslant V_f(x, y) + V_f(y, z)$$

Cette inégalité étant vraie pour toute subdivision $s \in \mathscr{S}(x, z)$, cela montre que tous les éléments de $\mathscr{A}_f(x, z)$ sont inférieurs au réel $V_f(x, y) + V_f(y, z)$. Par la question 3a, le sup de cet ensemble $\mathscr{A}_f(x, z)$ est donc lui-même inférieur à $V_f(x, y) + V_f(y, z)$. D'où :

$$\boxed{V_f(x, z) \leqslant V_f(x, y) + V_f(y, z)}$$

► Montrons l'inégalité $V_f(x, z) \geqslant V_f(x, y) + V_f(y, z)$.
Soit $t \in \mathscr{S}(x, y)$, mettons $t = (t_1, \dots, t_n)$, et $u \in \mathscr{S}(y, z)$, mettons $u = (u_1, \dots, u_m)$. Posons :

$$s := (t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_m)$$

Il s'agit d'une subdivision de $[x,z]$. De plus :

$$v_f(s) = v_f(t) + v_f(u)$$

car à la jonction, le terme $\left|f(u_1) - f(t_n)\right|$ est nul (il s'agit de $\left|f(y) - f(y)\right|$). D'où :

$$v_f(t) + v_f(u) \leqslant V_f(x,z)$$

Or, en fixant u et en constatant que cette inégalité, qui peut être ré-écrite ainsi,

$$v_f(t) \leqslant V_f(x,z) - v_f(u)$$

est vraie pour toute subdivision $t \in \mathscr{S}(x,y)$, on a par la question 3a :

$$V_f(x,y) \leqslant V_f(x,z) - v_f(u)$$

Puis en écrivant cette même inégalité sous la forme

$$v_f(u) \leqslant V_f(x,z) - V_f(x,y)$$

et en constatant qu'elle est vraie pour toute subdivision $u \in \mathscr{S}(y,z)$, on a par la question 3a :

$$V_f(y,z) \leqslant V_f(x,z) - V_f(x,y)$$

D'où finalement : $\boxed{V_f(x,z) \geqslant V_f(x,y) + V_f(y,z)}$.

Finalement, les deux inégalités encadrées montrent bien la relation de Chasles voulue. Attention au passage aux sup bien trop rapide chez certains! Vous risquez d'écrire des choses fausses en allant trop vite.

(d) Montrons que g est croissante. Soit $x \leqslant y$ deux réels de $[a,b]$. Alors $[a,x] \subset [a,y]$ donc $g(y) \geqslant g(x)$.
On a bien montré que g est croissante.

Montrons maintenant que $g - f$ est croissante. Soit $x \leqslant y$ deux réels de $[a,b]$. On a :

$$\begin{aligned}(g-f)(y) - (g-f)(x) &= \big(g(y) - g(x)\big) - \big(f(y) - f(x)\big)\\ &= V_f(x,y) - \big(f(y) - f(x)\big)\end{aligned}$$

Or, la quantité $\left|f(y) - f(x)\right|$ est la variation de f selon la subdivision à deux points $s := (x,y)$ (subdivision de $[x,y]$). Donc par définition de $V_f(x,y)$, on a $\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant V_f(x,y)$ et donc en particulier $f(y) - f(x) \leqslant V_f(x,y)$. D'où :

$$(g-f)(y) - (g-f)(x) \geqslant 0$$

Ce travail montre que $g - f$ est croissante.

(e) On écrit alors

$$f = \underbrace{g}_{\text{croissante}} + \underbrace{(f-g)}_{\text{décroissante}}$$

ce qui prouve que f est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
Ce travail étant valable pour toute fonction à variation bornée sur $[a,b]$, on a montré l'implication $(\Rightarrow)$ de l'équivalence (E).
L'implication $(\Leftarrow)$ a été démontrée à la question 1b. L'équivalence (E) est donc bien démontrée.

4. **Variation d'une fonction continue.**

(a) f est continue sur $]0,1]$ comme produit et composée de fonctions continues. Reste à montrer la continuité en 0. Or :

$$\left|f(x)\right| \leqslant \sqrt{x} \to_{x\to 0} 0$$

Donc par encadrement, $f(x) \to_{x\to 0} 0$, et 0 est bien la valeur de $f(0)$. f est donc aussi continue en 0. C'est très dommage de perdre un point parce qu'on a oublié de traiter le cas $]0,1]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [[2,n]]$:

$$f(u_k) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\cos(k\pi) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left|f(u_k)-f(u_{k-1})\right| &= \left|\tfrac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} - \tfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{(k-1)\pi}}\right| \\ &= \underbrace{\left|(-1)^k\right|}_{=1} \times \left|\tfrac{1}{\sqrt{k\pi}} + \tfrac{1}{\sqrt{(k-1)\pi}}\right| \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{k\pi}} + \tfrac{1}{\sqrt{(k-1)\pi}} \\ &\geqslant \tfrac{2}{\sqrt{k\pi}} \qquad \left(\text{car } \tfrac{1}{\sqrt{(k-1)\pi}} \geqslant \tfrac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) \end{aligned}$$

D'où, en sommant ces inégalités sur $k \in [[2,n]]$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left|f(u_k)-f(u_{k-1})\right| \geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

(c) Pour tout $k \in [[2,n]]$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc par sommation :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = (n-1)\times\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or, $\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \to_{n\to+\infty} +\infty$ donc par minoration, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \to_{n\to+\infty} +\infty$. Beaucoup ont minoré par $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$. Un seul a montré qu'elle tendait vers $+\infty$

(d) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Posons la subdivision de $[0,1]$ suivante :

$$s^{(n)} := (0, u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1, 1)$$

On a

$$\begin{aligned} v_f(s^{(n)}) &= \underbrace{\left|f(u_n)-f(0)\right|}_{\geqslant 0} + \sum_{k=2}^{n}\left|f(u_k)-f(u_{k-1})\right| + \underbrace{\left|f(u_1)-f(1)\right|}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \sum_{k=2}^{n}\left|f(u_k)-f(u_{k-1})\right| \\ &\geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \to_{n\to+\infty} +\infty$, on a par minoration $v_f(s^{(n)}) \to_{n\to+\infty} +\infty$. Cela montre que l'ensemble $\mathscr{A}_f(0,1)$ n'est pas majoré, et donc que f n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$.

Beaucoup m'ont simplement dit $V_f([a,b])$ tend vers $+\infty$. Sachant que c'est ce que l'on cherche à montrer, il serait bon de s'assurer que vous avez compris l'exemple qu'on vous a fait étudié et que vous avez vérifié que, effectivement, ça montrait que f n'était pas à variation bornée.

Exercice 3 1. On a $\ln(x) = \ln(1+(x-1)) \underset{1}{\sim} x-1$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$. On peut donc prolonger par continuité f en posant $f(1) = 1$.

2. On va calculer un DL de f en 1. On pose $x=1+h$. On a

$$\frac{\ln(x)}{x-1}=\frac{\ln(1+h)}{h}=\frac{1}{h}\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)$$

donc

$$f(x)=1-\frac{(x-1)}{2}+\frac{(x-1)^2}{3}+o\left((x-1)^2\right).$$

On en déduit que f admet un DL1 en 1 donc elle est dérivable. De plus, l'équation de la tangente est $y=1-\dfrac{(x-1)}{2}=\dfrac{3-x}{2}$.

On peut aussi déterminer la limite du taux d'accroissement (mais il faudra travailler à nouveau pour la question suivante).

On a

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)^2}$$

On pose $h=x-1$, on a $\dfrac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{\ln(1+h)-h}{h^2}$. On a donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}=-\frac{1}{2}.$$

On en déduit que f est dérivable en 1 et $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$. L'équation de la tangente en 1 est donc $y=f(1)+f'(1)(x-1)=1-\dfrac{1}{2}(x-1)$ et on retrouve le même résultat.

3. On a vu avec le DL2 de f que $f(x)-\left(1+\dfrac{(x-1)}{2}\right)\underset{1}{\sim}\dfrac{(x-1)^2}{3}$ donc, localement, le graphe de f est au-dessus de la tangente.

Attention, c'est un résultat local! Ne me dites pas que c'est toujours positif

Exercice 4 1. (a) Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, la fonction f est continue sur $\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$, dérivable sur $\left]\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $x_k\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$ tel que

$$\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=f'(x_k),$$

c'est à dire :

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}f'(x_k)$$

Certains m'ont cité les hypothèses entre 0 *et* 1 *ce qui n'a pas de sens car on applique le TAF entre* $\dfrac{k-1}{n}$ *et* $\dfrac{k}{n}$.

(b) D'après la question précédente, les réels $x_1,\dots,x_n$ trouvés vérifient

$$0<x_1<\frac{1}{n}<x_2<\frac{2}{n}<\ldots<x_{n-1}<\frac{n-1}{n}<x_n<1$$

donc on a bien $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$. On somme les égalités $\dfrac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=f'(x_k)$ pour k variant de 1 à n. On a

$$n\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}f'(x_k).$$

On reconnaît une somme télescopique, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n\big(f(1) - f(0)\big) = n.$$

On a bien l'égalité souhaitée.

Globalement tout le monde a compris ce qu'il fallait faire mais c'est vraiment rédigé avec les pieds. Pensez notamment à bien montrer TOUT ce qu'on vous demande (notamment les x_i ordonnés)

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. On en déduit que f est k-lispchitzienne avec $k = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. On peut aussi choisir $k = \dfrac{1}{2}$ si on veut se simplifier les calculs.

(b) On résout $f(x) = x$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1$$

On a bien montré que f admet un unique point fixe positif, égal à 2.

Certains ont perdu du temps à montrer que f s'annulait un unique fois avec un tableau de variations... perte de temps

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 2| &= \left|f(u_n) - f(2)\right| \text{ car } f(2) = 2 \\ &\leqslant k|u_n - 2| \text{ car } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \end{aligned}$$

(d) Par une récurrence immédiate, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leqslant k^n |u_0 - 2|,$$

et $k \in [0,1[$ donc $k^n \to 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 2) = 0$ donc $u_n \to 2$.