Indications

1 Expliciter l'expression de A_n.

2 Utiliser l'unicité de l'écriture d'un polynôme.

3
1. Commencez par montrer qu'une solution est de degré 3.
2. Commencez par montrer qu'une solution non nulle est de degré 4.

5 Raisonner par récurrence sur n.

6 Déterminer son reste en sachant que son degré est majoré puis trouver les conditions pour que ce reste soit nul.

8 Traduire en terme de racines

9 Déterminer la forme du reste en majorant son degré puis évaluer en des valeurs particulières pour trouver ses coefficients

10 Traduire la divisibilité avec le reste de la division euclidienne.

11 Étudier la multiplicité de 1 en tant que racine de chaque polynôme.

12 Appliquer le théorème de Rolle pour montrer que P' est scindé à racines simples puis raisonner par l'absurde.

13 Poser $Z = X^3$ pour trouver toutes les racines du polynôme.

14 Remarquer que $-i$ est aussi racine donc P est divisible par X^2+1.

15 Écrivez le polynôme sous la forme $A^2 - B^2$.

16 Trouver toutes les racines complexes et grouper deux à deux celles qui sont conjuguées.

17 Regarder les racines de $P - Q$.

18 Considérer le polynôme $Q(X) - X$ avec Q associé à la fonction polynômiale.

19 Déterminer le degré de P s'il est non nul et trouver des racines évidentes.

20
1. Évaluer en z puis faites une récurrence.
2. Raisonner par l'absurde et montrer que P admet une infinité de racines.
3. Évaluer en $z+1$ puis utiliser la question précédente.
4. Montrer que j et $\overline{j}$ ont même multiplicité.

21
1. Notez d le degré et trouver la relation avec n.
2. Posez $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, injecter puis utilisez l'unicité des coefficients.
3. Vous devriez reconnaître un binôme de Newton.
4. Supposez, par l'absurde, que P admet une racine $a \neq -1$ de multiplicité k.

22
1. Chercher à écrire la fraction sous la forme $\dfrac{\alpha}{X} + \dfrac{\beta}{X-1} + \dfrac{\gamma}{X+1}$.
2. Chercher les racines du dénominateur.
3. Faites d'abord une division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

23
1. Poser $u = \sin(t)$.
2. Poser $u = \cos(t)$.

24 Déterminer le terme dominant de $(X^2+3X-5)^n$.

26 Prendre des valeurs particulières de X pour déterminer les coefficients du reste, dont vous connaissez une majoration du degré.

27 Écrire la forme générale du reste et évaluer la division euclidienne en des valeurs bien choisies.

28 Montrer que les trois racines (simples) de X^3+X^2+X+1 sont racines du polynôme.

29 Montrer que j est racine en utilisant les relations entre j et j^2.

30 Supposer que c'est le cas et traduire avec la dérivée.

31 Montrer que P admet une racine réelle puis que c'est la seule.

32 Raisonner par l'absurde.

33
1. Calculer les dérivées successives.
2. Traduire la multiplicité de 1 trouvée à la question précédente et identifier les coefficients restants.

34 Montrer que 1 est racine de multiplicité au moins 3.

35 Montrer que 1 est racine de multiplicité au moins 2 du polynôme.

36 Dériver jusqu'à obtenir un polynôme dont 1 n'est pas racine.

37 Déterminer cette racine multiple en regardant parmi les racines de P' puis factoriser.

38 Remarquer que $-i$ est aussi racine donc P est divisible par X^2+1.

39 Posez $T = X^2$.

40 Considérer $(X-1)P(X)$.

41 Poser $T = X^3$ pour déterminer les racines sur $\mathbb{C}$.

42 Il a beaucoup de racines?

43 Chercher à écrire la fraction sous la forme $\dfrac{\alpha}{X} + \dfrac{\beta}{X+1} + \dfrac{\gamma}{X^2+X+1}$.

44 Poser $u = \sin(t)$.

45 Raisonner avec le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+1)$.

46 Montrer, en supposant que $a = 0$, que tous les coefficients de P sont strictement positifs et raisonner par l'absurde.

47
1. Montrer d'abord que $P(X) - X$ divise $P \circ P(X) - P(X)$.
2. Trouver P tel que $P \circ P(x) - x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2$.

48 Si α est une racine, montrer que $\dfrac{\alpha+i}{\alpha-i}$ est une racine $2n+1$-ièmes de l'unité. Utiliser ensuite les relations coefficients/racines pour déterminer la valeur de la somme.

49 Qu'est-ce que cela implique sur les racines de A?

50 Montrer que le polynôme $P(X) - X$ est nul et obtenir une contradiction.

51 Montrez que $0, -1$ et -2 sont racines de P, écrivez $P = X(X+1)(X+2)Q(X)$ et montrez que Q est constant.

52 Montrer qu'une solution non nulle est de degré 3.

53 Dériver l'égalité.