Réponses du TD n 15

Réponse 1 le terme dominant de A^n est $2niX^{n-1}$, le terme dominant de P_n est $\frac{(2n)!}{n!}X^n$.

Réponse 2 $Q = \sum_{j=0}^{m} a_{2j}X^j$

Réponse 3
1. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$.
2. $P = a_4(x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 3x), a_4 \in \mathbb{R}$

Réponse 4 $L_n(1) = \binom{n}{0}^2 n! = n!$. et le terme dominant de L_n vaut $\dfrac{(2n)!}{n!}X^n$.

Réponse 7 $X^n = (X-3)(X+3)Q(X) + \dfrac{1}{6}(3^n - (-3)^n)X + \dfrac{1}{2}(3^n + (-3)^n)$ et
$$M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n + 5(-3)^n}{6} & \dfrac{(-3)^n - 3^n}{3} & \dfrac{(-3)^n - 3^n}{6} \\ \dfrac{(-3)^n - 3^n}{3} & \dfrac{(-3)^n + 2.3^n}{3} & \dfrac{(-3)^n - 3^n}{3} \\ \dfrac{(3)^n - (-3)^n}{6} & \dfrac{(-3)^n - 3^n}{3} & \dfrac{5(-3)^n + 3^n}{6} \end{pmatrix}$$

Réponse 8 0 et 2 sont racines

Réponse 9 $\sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

Réponse 10 $X^n - 1 = (X^d - 1)\left(X^r \sum_{k=0}^{q-1} X^{dk}\right) + X^r - 1\ X^d - 1 | X^n - 1 \Leftrightarrow X^r - 1 = 0$

Réponse 13 $X^6 + X^3 + 1 = \prod_{k=1}^{3}\left(X^2 - 2\cos\left(\dfrac{2^k i\pi}{9}\right)X + 1\right)$.

Réponse 14 $X^4 - X^3 + 6X^2 + 2X - 5 = (X^2+1)(X^2 - 2X + 5)$

Réponse 15 $(X^2+1)^2 + (X^2 - X - 1)^2 = 2\left(X^2 - 2X + 2\right)\left(X^2 + X + \dfrac{1}{2}\right) = \left(X^2 - 2X + 2\right)\left(2X^2 + 2X + 1\right)$.

Réponse 16 $P(X) = (X - \sqrt[7]{3})\prod_{k=1}^{3}\left(X^2 - 2\sqrt[7]{3}\cos\dfrac{2k\pi}{7} + \sqrt[7]{9}\right)$.

Réponse 19 $\{\lambda(X^2 - 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Réponse 21 $a_{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1}a_k$, $P(X) = a_0\,(X+1)^n$

Réponse 22 $\dfrac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)} = \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{X}$ $\dfrac{3X^2+3}{(X-1)(X+1)(X+2)} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{3}{X+1} + \dfrac{5}{X+2}$ $\dfrac{X^2+1}{X^2+4} = 1 - \dfrac{3}{X^2+4}$

Réponse 23 $\displaystyle\int^x \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t}\,\mathrm{d}t = \sin(x) - \frac{1}{\sin(x)} - 6\arctan(\sin x)$ $\displaystyle\int^x \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x$

Réponse 24 $\dfrac{(2n)!}{n!}X^n$

Réponse 25 $X^7 - 2X + 1 = (X^5 + X^3 + X)(X^2 - 1) - X + 1$. $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$.

Réponse 26 $4X - 3$ et 5.

Réponse 27 $(1 - (-1)^n)\,X + 2(-1)^n - 3$.

Réponse 28 Les trois racines sont 1 et $\pm i$.

Réponse 30 non

Réponse 31 $\{\gamma(X - \alpha)^n, (\gamma, \alpha) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}^\star\}$

Réponse 33 1 est donc racine de P_n de multiplicité 3. $P_1(X) = (X-1)^3$, $P_2(X) = 2(X-1)^3(X+1)$ et $P_3(X) = 3(X-1)^3\left(X + \dfrac{2 + i\sqrt{5}}{3}\right)\left(X + \dfrac{2 - i\sqrt{5}}{3}\right)$

Réponse 36 1 est racine de multiplicité 3 de P

Réponse 37 $P(X) = (X-2)^2(X + 2 + \sqrt{6})(X + 2 - \sqrt{6})$.

Réponse 38 $X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 3 = (X^2+1)(X^2 + 2X + 3)$

Réponse 39 $\pm i\sqrt{5 \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$.

Réponse 40 $e^{\frac{2ki\pi}{5}}$ pour k variant de 1 à 4.

Réponse 41 $X^6 - 2X^3\cos(6\theta) + 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{2}(X^2 - 2\cos\left(2\theta + \frac{2k\pi}{3}\right)X + 1)$.

Réponse 43 $\dfrac{5}{(X+1)^5 - X^5 - 1} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{X^2+X+1}$.

Réponse 44 $\displaystyle\int^x \frac{\cos t - \sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right) + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)$

Réponse 45 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-1)^k}{(k-1)!}$

Réponse 47 $x = 2 \pm \sqrt{3}$ ou $x = 1 \pm \sqrt{2}$

Réponse 48 $-i\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, la somme est nulle.

Réponse 51 $P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Réponse 52 $X^3 + \lambda X^2 + \dfrac{\lambda^2}{3}X + \dfrac{\lambda^3}{27}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi que le polynôme nul.

Réponse 53 $\dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.