Correction du DM n 6

Exercice 1 1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application croissante. Soit $x < y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$. Cela implique $f(x) + x \leqslant f(y) + xf(y) + y$ donc $f + id$ est strictement croissante.

2. On considère les applications croissantes de $[|1, p|]$ dans $[|1, n|]$ pour $(p, n) \in [|1, 2|]$.

   - Lorsque $p = 1$, toutes les applications de $[|1, 1|]$ dans $[|1, n|]$ sont strictement croissantes.
   - Lorsque $p = 2$ et $n = 1$, il n'y en a aucune.
   - Lorsque $p = 2 = n$, il n'y en a qu'une qui est l'identité.

3. On remarque qu'une application strictement croissante est injective donc son image est de même cardinal que l'ensemble de départ. Par ailleurs, étant donnée une fonction f strictement croissante, elle est déterminée par son image. En effet, le plus petit élément de son image est nécessairement l'image de 1, le deuxième plus petit est l'image de 2 etc. Le nombre d'applications strictement croissantes est donc égale au nombre d'images possibles c'est-à-dire au nombre de parties à p éléments de $[|1, n|]$. On a donc $\#C^s_{n,p} = \binom{n}{p}$.

4. On considère l'application
$$\varphi \left\{ \begin{array}{lcl} C_{p,n} & \to & C^s_{p,n+p-1} \\ f & \mapsto & f + id - 1 \end{array} \right.$$
On sait que si f est croissante, $f + id$ est strictement croissante donc $f + id - 1$ aussi. Par ailleurs, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $f(k) \in [\![1, n]\!]$ donc $f(k)+k-1 \in [\![1, n+p-1]\!]$, ce qui montre que φ est bien définie. Pour la bijectivité, on remarque qu'un antécédent d'une fonction g est la fonction $g - id + 1$. Reste à montrer que cet antécédent appartient bien à l'espace de départ. Tout d'abord, on remarque que $g(2) > 1$ donc $g(2) \geqslant 2$ par stricte croissance de g puis, par récurrence sur k, $g(k) \geqslant k$ pour tout k. De même, $g(p) \leqslant n + p - 1$ donc $g(p - 1) \leqslant n + p - 2$ puis, par récurrence sur k, $g(p - k) \leqslant n + p - k - 1$. Autrement dit, $g(k) \leqslant n + k - 1$. On a donc $g(k) - k + 1 \leqslant n$. On a montré que $g - id + 1$ va de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

   Reste à montrer que c'est une application croissante. Soit donc $x \leqslant y$, alors $g(x) < g(x + 1) < \ldots < g(y)$ et, comme x et y sont des entiers on montre facilement que $g(x) \leqslant g(y) + (x - y)$. On a donc $g(x) - x \leqslant g(y) - y$ puis $g(x) - x + 1 \leqslant g(y) - y + 1$ donc $g - id + 1$ est croissante.

   On a montré que toute fonction $g \in C^s_{p,n+p-1}$ admettait un antécédent unique dans $C_{p,n}$, φ est bien bijective. On a donc $\#C_{p,n} = \#C^s_{n,n+p-1}$. Reste à calculer le cardinal de l'ensemble des applications strictement croissantes entre deux ensembles finis.

   Pour cela, on remarque qu'une application f strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est déterminée par son image, qui est une partie à p éléments de $[\![1, n]\!]$. En effet, une telle application f est injective donc $\mathrm{Im}(f)$ est bien de cardinal p. Par ailleurs, étant donnée une partie A à p éléments de $[\![1, n]\!]$, c'est l'image d'une unique fonction strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, à savoir la fonction qui à 1 associe $\min(A)$, à 2 associe $\min(A \setminus \{\min(A)\})$ et ainsi de suite jusqu'à p qui s'envoie sur $\max(A)$. Il y a donc $\binom{n}{p}$ fonction strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

5. En utilisant la question précédente et le fait que deux ensembles finis en bijection ont même cardinal, on a $\#C_{n,p} = \#C^s_{p,n+p-1} = \binom{n+p-1}{p}$.

6. On suit l'indication et on pose $S_k = \sum\limits_{k=1}^{k} a_i$. On remarque que si $(a_1, \ldots, a_p)$ est un p-uplet tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i \leqslant n$, alors $k \mapsto S_k$ est une application croissante de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$. Réciproquement, étant donné une application f croissante, le p-uplet

$$(a_1, \ldots, a_p) = (f(1), f(2) - f(1), \ldots, f(p) - f(p-1))$$

satisfait la condition demandée (la somme des coordonnées vaut $f(p)$ et est donc inférieure ou égale à n) et de plus $f(k) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ pour tout $k = 1 \ldots p$ donc on a montré qu'il y a en bijection entre l'ensemble des p-uplets recherché et l'ensemble des applications croissantes de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$. Il y a donc $\binom{n+p-1}{p}$ tels p-uplets.

7. Utilisons un raisonnement analogue à celui de la question précédente. En considérant la même application, on montre que le nombre de p-uplets recherché est égal au cardinal de l'ensemble des applications croissantes de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$ telles que $f(p) = n$. Reste à déterminer ce cardinal. On remarque qu'une telle application est déterminée par les images de $1 \ldots p-1$ (puisque l'image de p est imposée égale à n). Le nombre de telles applications est donc égal au nombre d'applications croissantes de $[|1,p-1|]$ dans $[|1,n|]$ soit $\binom{n+p-2}{p-1}$.

   On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} & \{(a_1, \ldots, a_p) \in [\![0,n]\!], \sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant n\} \\ = \; & \{(a_1, \ldots, a_p) \in [\![0,n]\!], \sum_{i=1}^{p} a_i = n\} \cup \{(a_1, \ldots, a_p) \in [\![0,n]\!], \sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant n-1\} \end{aligned}$$

   et la réunion est disjointe. On a donc

$$\begin{aligned} & \#\{(a_1, \ldots, a_p) \in [\![0,n]\!], \sum_{i=1}^{p} a_i = n\} \\ = \; & \#\{(a_1, \ldots, a_p) \in [\![0,n]\!], \sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant n\} - \#\{(a_1, \ldots, a_p) \in [\![0,n]\!], \sum_{i=1}^{p} a_i \leqslant n-1\} \\ = \; & \binom{n+p-1}{p} - \binom{n+p-2}{p-1} \\ = \; & \binom{n+p-1}{p-1} \text{ par la formule du triangle de Pascal} \end{aligned}$$