Correction du DM n 7

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{e^{2x}+1} &= \frac{1+x+x^2+o(x^2)}{1+1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)}\\
&= \frac{1+x+x^2+o(x^2)}{2(1+x+x^2+o(x^2)}\\
&= \frac{1}{2}(1+x+x^2+o(x^2))(1-(x+x^2+o(x)^2)+(x+x^2+o(x^2))^2\\
&= \frac{1}{2}(1+x+x^2+o(x^2))(1-x+o(x)^2)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}+o(x^2)
\end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente est $y = \dfrac{1}{2}$.

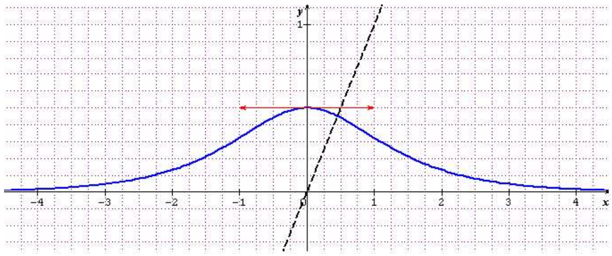
Par ailleurs, on a $f(x) - \dfrac{1}{2} \sim -\dfrac{x^2}{4}$ et $-\dfrac{x^2}{4} \leqslant 0$ donc, <u>au voisinage de 0</u>, la courbe est en dessous de la tangente.

(b) $\forall x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R} :\ -x \in \mathcal{D}_f$, et :
$f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{2(-x)}+1} = \dfrac{e^{2x}.e^{-x}}{e^{2x}(e^{-2x}+1)} = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} = f(x)$.
La fonction f est bien une fonction paire. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant jamais ($\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x} > 0$).
Pour tout $x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = \dfrac{e^x.(e^{2x}+1)+e^x.(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$.
$f'(x) > 0 \iff e^{2x} < 1 \iff x < 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où la tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
f	0^+	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0^+

$$\begin{cases}
\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x+e^{-x}} = 0^+\\
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x+e^{-x}} = 0^+
\end{cases}$$

On donne aussi l'allure de la courbe représentative de f (on a aussi tracé la droite d'équation $y = x$) :



Penser à placer la tangente horizontale au point de la courbe de coordonnées $(0, 1/2)$.

(c) On pose $g : x \mapsto f(x) - x$ pour trouver les points fixes éventuels de f. Sur $\mathbb{R}_+$: g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et : $\forall x \geqslant 0,\ g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ (puisqu'on a déjà $f'(x) \leqslant 0$!).
La fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc injective.
On a de plus : $g(0) = f(0) - 0 = 1/2$, et $g(1/2) = \dfrac{e^{1/2}}{e+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{e} - e/2 - 1/2}{e+1} = -\dfrac{(\sqrt{e}-1)^2}{2(e+1)} < 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g continue, entre 0 et $\dfrac{1}{2}$, on peut affirmer que 0 admet un antécédent par g. Par injectivité de g, cet antécédent est unique. On a montré que l'équation $(*)$: $g(x) = 0 \iff f(x) = x$ possède une *unique* solution $\ell \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, qui est alors un point fixe de f.

(d) $\forall x \in \mathbb{R} :\ |f'(x)| = \dfrac{e^x|e^{2x}-1|}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{|e^{2x}-1|}{e^{2x}+1}.f(x)$. D'après l'inégalité triangulaire :

$$|e^{2x} - 1| \leqslant e^{2x} + 1 \Rightarrow \frac{|e^{2x}-1|}{e^{2x}+1} \leqslant 1$$

donc

$$|f'(x)| \leqslant f(x).$$

Par ailleurs, 1/2 étant le maximum de f sur $\mathbb{R}$ (cf. tableau de variation), on a :
$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}.}$

On retrouve que le graphe de f est en dessous de la droite $y = \dfrac{1}{2}$.

2. On définit la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
$\star$ Pour $n = 0$: c'est vrai. C'est aussi vrai pour $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1/2$.
$\star$ Si la propriété est vraie à un certain rang n : par décroissance stricte de f sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[0, 1/2]$, on a :
$0 \leqslant u_n \leqslant 1/2$ (H.R.) $\Rightarrow f(1/2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(0) \iff \sqrt{e}/(e+1) \leqslant u_{n+1} \leqslant 1/2$, et comme $f(1/2) > 0$ (valeur approchée donnée par l'énoncé),
on a bien $u_{n+1} \in [0, 1/2]$.
La propriété est vraie au rang $n = 0$, et est héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Sur le segment dont les bornes sont l et u_n : f est continue, dérivable, et pour tout x compris entre u_n et l, $|f'(x)| \leqslant 1/2$ (propriété en fait vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$!).
On est dans le cadre de l'utilisation de l'*inégalité des accroissements finis* :

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|,$$

ce qui se réécrit:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|,$$

et ce quelle que soit la valeur de n. Une récurrence immédiate donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$, et puisque $u_0 = 0, 0 < \ell < \dfrac{1}{2}$, on a bien ;

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (0 \leqslant)\ |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}}$.

(c) Le théorème d'encadrement appliqué à l'inégalité trouvée à la question précédente permet de conclure : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l.}$

3. On aura une approximation à ϵ près si $\epsilon \geqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$ ce qui est équivalent à $n \geqslant \lfloor -\ln(\epsilon)$, on peut donc écrire le programme suivant :

```
from math import exp, log
precision=float(input('Entrer la précision souhaitée :'))
def f(x):
    y=exp(x)/(exp(2*x)+1)
    return(y)

u=0
for i in range(int(-log(precision))):
    u=f(u)
print(' un approximation de l à', precision, 'près est ',u)
```

ou bien

```
from math import exp, log
precision=float(input('Entrer la précision souhaitée :'))
def f(x):
    y=exp(x)/(exp(2*x)+1)
    return(y)

u=0
n=0
while precision<1/2**(n+1):
    u=f(u)
    n=n+1
print(' un approximation de l à', precision, 'près est ',u)
```

Attention, beaucoup ont mis comme condition $|u - f(u)|$ <precision pour que la boucle s'arrête ce qui revient à s'arrêter au rang n vérifiant $|u_{n+1} - u_n|$ <precision. Pourquoi cela impliquerait-il $|u_{n+1} - l|$ <precision?