Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DM 0

Devoir maison 0.

à rendre le lundi 10 mars

---

1. Soit P et Q deux polynômes tels que $\forall t \in [-1,1], P(t) = Q(t)$. Montrer que $P = Q$.

Partie I: construction des polynômes de Tchebychev
On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1} - T_n$. Pour tout n, le polynôme T_n ainsi construit est appelé n-ième polynôme de Tchebychev.

2. Montrer que T_n est de degré n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer les coefficients de X^n et X^{n-1} de T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(\cos\theta) = \cos n\theta$.

Partie II: une autre construction de la suite
On peut aussi définir la suite des $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ " à l'envers" par rapport à la partie I.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule de Moivre : $\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$, montrer qu'il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \cos(nx) = T_n(\cos(x)) \qquad (E_n)$$
On montre, comme à la question 4, que T_n est le seul polynôme à vérifier (E_n).
7. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, et $x \in \mathbb{R}$, factoriser
$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$$
8. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$
On détermine ensuite le degré de T_n et son terme dominant comme dans les questions 2 et 2.

Partie III: racines de T_n
Soit $n \in \mathbb{N}$

9. Déterminer les racines de T_n dans $[-1,1]$
10. En déduire toutes les racines de T_n dans $\mathbb{C}$ et préciser leurs multiplicités.
11. En déduire la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
12. Donner la valeur explicite du produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Partie IV: minimum de la norme infinie

Dans toute cette partie, on confond un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

13. Soit f une fonction continue, justifier l'existence de $\max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
On note désormais $||f||_\infty = \max_{t\in[-1,1]} |f(t)|$.

Le but de cette partie est de montrer que pour tout polynôme unitaire de degré n, $||P||_\infty$ admet un minimum égal à 2^{n-1}

14. Montrer que $||T_n||_\infty = 1$

15. En déduire qu'il existe un polynôme unitaire V_n de degré n, que l'on précisera, tel que $||V_n|| = 2^{n-1}$.

16. Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et on suppose qu'il existe un polynôme unitaire P de degré n tel que $||P||_\infty < 2^{n-1}$.
    (a) Montrer que $\deg(V_n - P) \leqslant n - 1$.
    (b) On pose, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$. Donner, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le signe de $(V_n - P)(x_k)$.
    (c) En déduire que $V_n = P$.

17. Conclure