Devoir surveillé 6, sujet 1 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \neq b$.
On considère deux urnes U et V composées ainsi :
— l'urne U contient b boules blanches et a boules noires ;
— l'urne V contient a boules blanches et b boules noires.
On se propose d'étudier une succession de tirages au hasard d'une boule dans ces deux urnes. *Après chaque tirage, la boule est remise* dans l'urne dont elle provient.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note
— U_n : « le n-ième tirage a lieu dans l'urne U » ;
— B_n : « le n-ième tirage donne une boule blanche ».
On étudie deux protocoles différents dans les parties **I** et **II** puis on compare les résultats dans la partie **III**.

Partie I.— Le premier tirage a lieu dans l'urne U. Ensuite :
— si un tirage a donné une boule blanche, alors le tirage suivant a lieu dans l'urne U ;
— si un tirage a donné une boule noire, alors le tirage suivant a lieu dans l'urne V.

1. Calculer $P(B_1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche pour la première fois au tirage numéro n.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(B_{n+1}) = \frac{b-a}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $P(B_n)$ en fonction de a, b et n.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n)$.

Partie II.— Le premier tirage a lieu dans l'urne U. Ensuite :
— si un tirage a donné une boule blanche, alors le tirage suivant a lieu dans la même urne ;
— si un tirage a donné une boule noire, alors le tirage suivant a lieu dans l'autre urne.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n, $\overline{U_n}$, B_n et $\overline{B_n}$.
2. En déduire que $P(U_{n+1}) = \frac{b}{a+b}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer alors $P(B_n)$ pour tout $n \geqslant 2$.

Partie III.— L'objectif est d'obtenir une boule blanche au dernier tirage.

1. Montrer que les deux protocoles sont équivalents si $n = 2$.
2. Quel est le protocole le plus favorable si $b > a$?
3. Le résultat reste-t-il vrai dans le cas général ?

Exercice 2.

On considère dans tout ce problème la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$F(x) = \frac{\sin x}{x}$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Montrer que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F ce prolongement.
3. Montrer que F est C^1 et précisez les valeurs de $F'(0)$.
4. Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k.
5. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer <u>sans calcul</u> qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.
6. Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x\cos x - \sin x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
7. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.
8. En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4a).
9. Établir que $x_k \in \left] a_k, a_k + \dfrac{\pi}{2} \right[$.
10. Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de x_k.
11. Exprimer x_k à l'aide de $k\pi$ et $\arctan\left(\dfrac{1}{x_k}\right)$.
12. En déduire la limite de $x_k - k\pi$.

Exercice 3.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$.
On suppose en outre que :

- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$
- f' est strictement négative sur $[a,b]$.

Partie I. Principe de la méthode de Newton.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a,b[$, que l'on notera α.

   Le but de ce problème est de présenter une méthode pour obtenir une valeur approchée de α. Cette méthode consiste, à partir d'une première approximation x_0 de α, à linéariser l'équation $f(x) = 0$ au voisinage de x_0, donc à remplacer f par sa tangente en x_0.

2. Soit $x_0 \in [a,b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$.

   On introduit alors la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

   $$\forall x \in [a,b],\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

   On obtient ainsi une nouvelle approximation de α en prenant $x_1 = g(x_0)$. En poursuivant, on est ainsi conduit à étudier l'existence, puis la convergence vers α, de la suite (x_n) définie par la relation $x_{n+1} = g(x_n)$.

Partie II. Étude de la fonction g.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et calculer sa dérivée.
2. Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
3. On souhaite prouver qu'il existe $K>0$ tel que pour tout $x\in[a,b]$, $|g(x)-\alpha|\leqslant K|x-\alpha|^2$.
   (a) Justifier l'existence d'un couple $(m,M)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que
   $$\forall x\in[a,b],\ |f'(x)|\geqslant m \quad \text{et} \quad |f''(x)|\leqslant M$$
   (b) Montrer qu'il existe $L>0$ tel que $\forall t\in[a,b],\ |f(t)|\leqslant L|t-\alpha|$
   (c) Soit $x\in[a,b]$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[x,\alpha]$ (ou $[\alpha,x]$), justifier que
   $$|g(x)-\alpha|\leqslant \frac{M}{m^2}L|x-\alpha|^2.$$
   (d) Conclure.

Partie III. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit (x_n) la suite récurrente définie par : $\begin{cases} x_0\in[a,b] \\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=g(x_n)\end{cases}$

1. Dans cette question uniquement, on suppose de plus que $f''>0$ sur $[a,b]$ et $x_0=a$.
   (a) Étudier les variations de g.
   (b) Justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, croissante et majorée par α.
   (c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
2. On revient au cas général.
   (a) Justifier qu'il existe $h>0$ tel que en notant $I=[\alpha-h,\alpha+h]$, on ait $Kh<1$ et $I\subset[a,b]$.
   (b) Établir que : $\forall x\in I,\ g(x)\in I$. En déduire que si $x_0\in I$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, x_n est bien définie et $x_n\in I$.

   On suppose dans toute la suite du problème que $x_0\in I$.

   (c) Montrer que :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ |x_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{K}\Big(K|x_0-\alpha|\Big)^{2^n} \quad (*)$$
   (d) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Correction du DS n 6, sujet 1

Exercice 1

Franchement, ce n'est pas possible de ne pas réussir à faire les deux premières parties qui sont vraiment l'application directe du cours de probabilité. Faire impasse sur les probabilités parce que "je n'y comprends rien" est vraiment un très mauvais calcul alors arrêtez de penser que vous n'êtes pas apte à comprendre les probas et jetez-vous à l'eau. Pour info, j'ai piqué ce pb aux BCPST première année, qui n'ont donc, pour la plupart, pas suivi la spécialité maths alors évidemment que vous êtes capables de le faire.

Partie I.—

1. Le premier tirage a lieu dans l'urne U qui contient b boules blanches et a boules noires. On a donc $\boxed{P(B_1) = \dfrac{b}{a+b}.}$

   On évite de balancer la probabilité sans un minimum d'explication (comme le fait qu'on commence par un tirage dans l'urne U)

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons B l'événement « obtenir une boule blanche pour la première fois au tirage numéro n ».

   — Si $n = 1$ on a $B = B_1$ et on a vu à la question précédente que $\boxed{P(B_1) = \dfrac{b}{a+b}.}$

   — On suppose désormais que $n \geqslant 2$. Compte tenu du protocole de tirage dans cette partie, tant qu'on tire une boule noire, le tirage suivant a lieu dans l'urne V.
   On a alors
   $$B = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n.$$
   D'après la formule des probabilités composées, on a
   $$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n) \\ &= P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \times \cdots \times P_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}}}(B_n) \\ &= \frac{a}{a+b} \times \underbrace{\frac{b}{a+b} \times \cdots \times \frac{b}{a+b}}_{(n-2) \text{ termes}} \times \frac{a}{a+b} \\ &= \frac{a^2 b^{n-2}}{(a+b)^n}. \end{aligned}$$

   En conclusion, on a
   $$\boxed{P(B) = \frac{a^2 b^{n-2}}{(a+b)^n} \text{ si } n \geqslant 2.}$$

   On commence par écrire l'évènement dont on cherche la probabilité (avec des intersections) puis on cite la formule que l'on utilise. Certains m'ont écrit que l'on recherchait une probabilité conditionnelle, ce qui est faux.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule $P(B_{n+1})$ avec la formule des probabilités totales appliquée au le sys-

tème complet d'événements $(B_n, \overline{B_n})$. On obtient

$$\begin{aligned}P(B_{n+1}) &= P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})\\ &= \frac{b}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}P(\overline{B_n})\end{aligned}$$

car si B_n est réalisé, le tirage suivant a lieu dans l'urne U, de même si $\overline{B}_n$ est réalisé.

$$\begin{aligned}&= \frac{b}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}(1-P(B_n))\\ &= \frac{b-a}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(B_{n+1}) = \frac{b-a}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

Là encore, on cite la formule utilisée et le SCE que l'on considère. Comme on veut $P(B_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$, c'est naturel de choisir $(B_n, \overline{B}_n)$ comme SCE. Certains ont voulu raisonner avec $(U_{n+1}, \overline{U}_{n+1})$, ce qui est possible car $U_{n+1} = B_n$ avec ce protocole. En revanche, raisonner avec $(U_n, \overline{U}_n)$ ne mène nulle part.

(b) On cherche $c \in \mathbb{R}$ tel que $c = \frac{b-a}{a+b}c + \frac{a}{a+b}$ ce qui donne après calculs $c = \frac{1}{2}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = b_n - \frac{1}{2}$ est donc géométrique de raison $\frac{b-a}{a+b}$ et de premier terme $v_1 = b_1 - \lambda = \frac{b}{a+b} - \frac{1}{2} = \frac{b-a}{2(a+b)}$; on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = v_1\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n-1} = \frac{b-a}{2(a+b)} \times \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(B_n) = b_n = v_n - c = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n} + \frac{1}{2}.}$$

Donc vous saviez calculer le terme général d'une suite géométrique au DS5 et là vous ne savez plus ? Globalement, vous avez trouvé $\frac{1}{2}$ mais beaucoup ont pris $P(B_1)$ pour premier terme de la suite géométrique $\left(P(B_n) - \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de $\frac{b}{a+b} - \frac{1}{2}$. Certains aussi ont mis une puissance n au lieu de $n-1$ alors que le premier terme est celui d'indice 1 (et pas 0).

(c) On a $-1 < \frac{b-a}{a+b} < 1 \Leftrightarrow -(a+b) < b-a < a+b$ ce qui est vrai car a et b sont positifs. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \frac{1}{2}.}$

J'ai vu beaucoup de $\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n \to 0$ car $\frac{b-a}{a+b} < 1$ ce qui est faux (mais vraiment, pensez à $(-3)^n$.

Partie II.—

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement U_{n+1} se réalise si et seulement si le $(n+1)$-ième tirage a lieu dans l'urne U, c'est-à-dire si et seulement si :
   — le n-ième tirage a eu lieu dans U et a donné une boule blanche ;
   — OU le n-ième tirage a eu lieu dans V et a donné une boule noire.
   Ainsi $\boxed{U_{n+1} = (U_n \cap B_n) \cup (\overline{U_n} \cap \overline{B_n}).}$

   Un minimum d'explication est évidemment nécessaire.

2. Les événements $(U_n \cap B_n)$ et $(\overline{U_n} \cap \overline{B_n})$ sont incompatibles donc

$$P(U_{n+1}) = P(U_n \cap B_n) + P(\overline{U_n} \cap \overline{B_n})$$

puis, avec la formule des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P_{U_n}(B_n)P(U_n) + P_{\overline{U_n}}(\overline{B_n})P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(U_n) + \frac{b}{a+b}P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(U_n) + \frac{b}{a+b}(1 - P(U_n)) \\ &= \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(U_{n+1}) = \dfrac{b}{a+b} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Là encore, on précise que les évènements sont incompatibles (et on évite de parler de réunion disjointe, il y a un vocabulaire spécifique pour les probas, c'est celui-là que vous devez utiliser).

3. Soit n un entier $\geqslant 2$. On calcule $P(B_n)$ avec la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(U_n, \overline{U_n})$:

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P_{U_n}(B_n)P(U_n) + P_{\overline{U_n}}(B_n)P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(U_n) + \frac{a}{a+b}P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b} \times \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\left(1 - \frac{b}{a+b}\right) \\ &= \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(B_n) = \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \text{ pour tout entier } n \geqslant 2.}$

Partie III.—

1. On calcule la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage dans les deux protocoles. Pour le premier,

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \overline{B_1}) \text{ car } (B_1, \overline{B}_1) \text{ est un SCE} \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P_{\overline{B}_1}(B_2) \text{ par la formule des probas totales} \\ &= \frac{a}{a+b} \times \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \end{aligned}$$

On obtient bien la même probabilité qu'avec le deuxième protocole.

2. On raisonne par équivalence :

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} > \frac{(b-a)^n}{2(a+b)^n} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a^2+b^2)(a+b)^{n-2} > (b-a)^n + (a+b)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^{n-2}\left(2a^2+2b^2-(a+b)^2\right) > (b-a)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^{n-2}\left(a^2-2ab+b^2\right) > (b-a)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^{n-2} > (b-a)^{n-2} \text{ en divisant par } (b-a)^2 > 0$$

La dernière inégalité est vraie par croissance de $x \mapsto x^{n-2}$ sur $\mathbb{R}^+$, car $a+b > b-a > 0$. Par équivalence, on a montré que le deuxième protocole est plus favorable dans le cas où $b > a$.

On peut aussi montrer comme Arthur que si $b > a$, alors la suite arithmético-géométrique est décroissante donc majorée à partir de l'indice 2 par son terme d'indice 2 qui correspond à la probabilité avec le second protocole.

3. Dans le cas général, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_1(B_n) = \frac{1}{2}$, en notant P_1 la probabilité avec le premier protocole. Or

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a^2+b^2) > (a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 > 0$$

donc, par équivalence, $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} > \frac{1}{2}$. On en déduit que pour n grand, la probabilité avec le deuxième protocole sera plus favorable que celle avec le premier protocole.

Exercice 2 On considère dans tout ce problème la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$F(x) = \frac{\sin x}{x}$$

1. (a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

F est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\star$. Elle est donc continues sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Tous ceux qui m'ont parlé de la fonction sin(x) ou de la fonction x ont eu 0. À ce stade là, je me dis que vous le faites exprès.

(b) Montrer que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F ce prolongement.

On a $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 1$ car $\sin x \sim x$ en 0. On peut donc prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = 1$.

Attention à ne pas écrire "on a $F(0) = 1$", F n'est pas définie en 0 ! C'est vous qui imposez la valeur en 0 pour obtenir un prolongement continu.

2. (a) Montrer que F est C^1 et précisez la valeur de $F'(0)$.

La fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$F'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

On a donc

$$F'(x) = \frac{x(1+o(x)) - x + o(x^2)}{x^2} = \frac{o(x)^2}{x^2} = o(1),$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} F'(x) = 0$. Par le théorème de la limite de la dérivée, on a F dérivable en 0 et F' continue en 0 donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Contrairement à la question précédente, vous n'avez pas votre mot à dire sur $F'(0)$. Le thm de la limite de la dérivée dit que F est dérivable en 0 et que $F'(0)$ vaut la limite réelle de la dérivée, vous n'avez pas à poser quoi que ce soit. Si vous calculez la limite du taux d'accroissement, vous montrez que F est dérivable en 0 mais pas qu'elle est C^1.

3. (a) Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k.

On a $\forall k \in \mathbb{N}^\star, a_k = k\pi$, la suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ est donc clairement croissante.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer <u>sans calcul</u> qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a $F(a_k) = F(a_{k+1})$, F est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$. Par le théorème de Rolle, il existe $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

Pour avoir tous les points, il fallait citer Rolle et citer correctement ses hypothèses. Certains utilisent le TAF. Ce n'est pas faux mais c'est étrange.

(b) Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x\cos x - \sin x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

On a montré précédemment que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $F'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$. On a donc bien F' du même signe que h.

(c) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

La fonction h est dérivable et on a :

$$\forall x > 0, h'(x) = -x\sin x + \cos x - \cos x = -x\sin x.$$

Sur un intervalle de la forme $[a_k, a_{k+1}] = [k\pi, (k+1)\pi]$, la fonction sin est de signe constant. On en déduit que $h'(x)$ est de signe constant sur $[a_k, a_{k+1}]$, la fonction h est strictement monotone sur cet intervalle.

Pas besoin de disjonction de cas ici, on ne demande pas le sens de monotonie. Me dire que la fonction ne s'annule pas sur cet intervalle est incomplet, il faut préciser qu'elle est continue pour avoir qu'elle est de signe contant.

(d) En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4a).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction h est strictement monotone sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, elle y est donc injective et s'annule au plus une fois. Comme $F'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$, on en déduit que h et donc F' s'annule exactement une fois sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. On a montré que F' s'annulait en x_k, on sait désormais que ce réel x_k est unique.

Il est totalement faux de dire que F' est monotone.

(e) Établir que $x_k \in \left]a_k, a_k + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Montrons que $F'(a_k)$ et $F'\left(a_k + \dfrac{\pi}{2}\right)$ sont de signes opposés. Il suffit, pour cela, de montrer que $h(a_k)$ et $h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)$ le sont. On a :

$$h(a_k) = a_k \cos a_k - \sin a_k = (-1)^k a_k,$$

et $h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) = \left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right) = -\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)\sin(a_k) - \cos(a_k) = (-1)^{k+1}\left(a_k + \frac{p}{2}\right)$. On a bien $h(a_k)$ et $h\left(a_k + \frac{\pi}{2}\right)$ de signes opposés donc, F' étant continue, F' s'annule dans $\left]a_k, a_k + \dfrac{\pi}{2}\right[$ (d'après le théorème des valeurs intermédiaires). Par unicité de x_k, on a $x_k \in \left]a_k, a_k + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Là encore, pas besoin de faire de disjonction de cas. Certains me montre qu'il existe un unique $x_k \in \left]a_k, a_k + \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $F'(x_k) = 0$. C'est problématique car x_k est déjà défini. Dites que F' s'annule sur cet intervalle par le TVI puis dites que ce point d'annulation est nécessairement x_k par unicité de ce dernier.

(f) Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de x_k.

On a $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = +\infty$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty$.

On a $k\pi \leqslant x_k \leqslant k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, donc $1 \leqslant \dfrac{x_k}{k\pi} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2k}$. Par encadrement, $\dfrac{x_k}{k\pi} \underset{k\to+\inf}{\longrightarrow} 1$ donc $x_k \sim k\pi$.

C'est quoi le problème avec trouver un équivalent ?

(g) On $F'(x_k) = 0 \Leftrightarrow \tan(x_k) = x_k$. Évidemment, on ne peut pas dire que x_k vaut alors $\arctan(x_k)$ puisque l'image de arctan est $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et que x_k n'appartient pas à cet intervalle. En revanche, tan étant π-périodique, on a $\tan(x_k) = \tan(x_k - k\pi)$ et, d'après ce qui précède, $x_k - k\pi \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a donc $\arctan(x_k) = \arctan\circ\tan(x_k - k\pi) = x_k - k\pi$.
Ainsi, $x_k = k\pi + \arctan(x_k) = k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x_k}$, car, pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

(h) On sait que $x_k \to +\infty$ donc $\dfrac{1}{x_k} \to 0$. Ainsi, $x_k - k\pi \to \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3 Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$.
On suppose en outre que :

- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$
- f' est strictement négative sur $[a,b]$.

Partie I. Principe de la méthode de Newton.

1. La fonction f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b) < 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule sur $]a,b[$. Par ailleurs, comme elle est strictement décroissante, ce point d'annulation est unique.

Étant donné que j'avais dit le lundi en td, le mercredi en cours puis dans la correction du DM7 (et sur de nombreuses copies) que le TVI ne donne pas l'unicité et qu'il est impératif de séparer l'existence de l'unicité pour montrer que vous avez compris, je vous cache pas que ça m'a passablement énervée de lire sur vos copies que je parle dans le vide.

2. Soit $x_0 \in [a,b]$. L'équation de la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ a pour équation
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
Lorsque $y = 0$, on a $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Partie II. Étude de la fonction g.

1. La fonction f est de classe C^2 donc f' est de classe C^1. La fonction g est un quotient de fonctions C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
$$\forall x \in [a,b], g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$
"f est C^2 donc g est C^1" est clairement trop rapide comme justification pour espérer avoir les points.

2. On a $g(\alpha) = \alpha$ car $f(\alpha) = 0$ et $g'(\alpha) = 0$.
3. On souhaite prouver qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|g(x) - \alpha| \leqslant K|x - \alpha|^2$.
   (a) On demande de justifier l'existence d'un couple $(m, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que
$$\forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \geqslant m \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leqslant M$$
   La fonction f est C^1 donc f' est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet donc un maximum : il existe $\beta \in [a,b]$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) \leqslant f'(\beta) < 0$, on a alors $\forall x \in [a,b]$, $\left|f'(x)\right| \geqslant -f'(\beta) > 0$ ce qui donne bien l'existence de m.
   Par ailleurs, la fonction f étant C^2, f'' est continue sur le segment $[a,b]$, elle est donc bornée : $\exists M \geqslant 0$, $\forall x \in [a,b], \left|f''(x)\right| \leqslant M$. Quitte à prendre un majorant plus grand, on peut supposer $M > 0$.

   Comme convenu, j'ai pénalisé lorsque le mot segment n'apparaissait pas. Ici, seul $m > 0$ nécessite du travail, M pouvant toujours être choisi strictement positif puisque c'est un majorant.

   (b) On a vu à la question précédente que f' était continue sur le segment $[a,b]$ donc bornée. Il existe donc $L > 0$ tel que $\forall x \in [a,b], \left|f'(x)\right| \leqslant L$. Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que
$$\forall t \in [a,b],\ |f(t) - f(\alpha)| \leqslant L|t - \alpha|$$
   puis, comme $f(\alpha) = 0$,
$$\forall t \in [a,b],\ |f(t)| \leqslant L|t - \alpha|$$
   (c) Soit $x \in [a,b]$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[x,\alpha]$ (ou $[\alpha, x]$), justifier que
$$|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{M}{m^2} L|x - \alpha|^2.$$
   On note $I = [\min(x,\alpha), \max(x,\alpha)]$. Alors
$$\forall t \in I, \left|g'(t)\right| = \frac{\left|f(t)\right|\left|f''(t)\right|}{f'(t)^2} \leqslant \frac{ML}{m^2}|t - \alpha|,$$

on a donc
$$\forall t \in I, \left|g'(t)\right| \leqslant \frac{ML}{m^2}|x-\alpha|.$$
Par l'inégalité des accroissements finis appliquée entre x et α, on a alors
$$\left|\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}\right| \leqslant \frac{ML}{m^2}|x-\alpha|,$$
puis
$$\left|g(x)-\alpha\right| \leqslant \frac{ML}{m^2}|x-\alpha|^2,$$
car $g(\alpha)=\alpha$.

Ici x est fixé. Beaucoup ont majoré $\left|g'(x)\right|$ par $\frac{ML}{m^2}|x-\alpha|$. Soit vous écrivez que ceci est vrai pour tout x (alors que x est fixé!) et on peut imaginer que vous voulez dire
$$\forall t, \left|g'(t)\right| \leqslant \frac{ML}{m^2}|t-\alpha|$$
mais, dans ce cas, vous n'avez pas majoré par une constante donc vous ne pouvez pas appliquer l'inégalité des accroissements finis. Soit vous majorez seulement $\left|g'(x)\right|$ et, là encore, vous ne pouvez pas utiliser l'inégalité des accroissements finis puisque vous n'avez majoré la dérivée que pour une valeur donnée et pas pour tout l'intervalle.

On pouvait aussi le rédiger ainsi :

D'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe c_x strictement compris entre x et α tel que
$$\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} = g'(c_x) = \frac{f(c_x)f"(c_x)}{f'^2(c_x)},$$
On a donc
$$\left|\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}\right| \leqslant \frac{ML}{m^2}|c_x-\alpha| \leqslant \frac{ML}{m^2}|x-\alpha|,$$
car c_x est compris entre x et α.

(d) On a bien l'existence de $K=\frac{Mm^2}{L}$ tel que
$$\forall x \in [a,b], |g(x)-\alpha| \leqslant K|x-\alpha|^2.$$

Partie III. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit (x_n) la suite récurrente définie par : $\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1}=g(x_n) \end{cases}$

1. Dans cette question uniquement, on suppose de plus que $f''>0$ sur $[a,b]$ et $x_0=a$.

   (a) On remarque que g' est du signe de f car $f"$ et f'^2 sont positives. On a donc

x	a		α		b
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$g(a)$	$\nearrow$	α	$\searrow$	$g(b)$

(b) On a $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} > a$ car $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$. On a donc $g([a,b]) = [g(a),\alpha] \subset [a,b]$. On en déduit que l'intervalle $[a,\alpha]$ est stable par g.
Comme $x_0 \in [a,\alpha]$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a,\alpha] \subset [a,b]$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \in [a,\alpha]$ donc $f(x_n) \geqslant 0$, on a donc $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geqslant x_n$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
On peut aussi dire que $x_0 \leqslant x_1$ et g est croissante sur $[a,\alpha]$ donc, comme $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a,\alpha]$, on montre, par récurrence sur n et croissance de g sur cet intervalle, que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqslant x_{n+1}$.
Enfin, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a,\alpha]$ donc la suite est bien majorée par α.

Beaucoup m'écrivent " l'intervalle est stable donc la suite est bien définie" ce qui est correct mais est-ce que vous comprenez pourquoi ? est-ce que vous voyez que c'est parce que si l'intervalle est stable, x_n appartiendra toujours à l'ensemble de définition de g, on pourra donc calculer x_{n+1} ? Par ailleurs, si vous ne dites pas que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a,\alpha]$, vous ne pouvez pas montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet, que ce soit par le raisonnement direct ou pour l'hérédité, vous avez besoin soit du signe de $f(x_n)$, soit de la monotonie de g et vous ne pouvez donc conclure que si vous savez que tous les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $[a,\alpha]$.
Enfin, certains me balancent encore des " la fonction est croissante donc la suite est monotone" sans aucun argument ni preuve. Si ça vous amuse de ne pas prendre les points.

(c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc, par le théorème de la limite monotone, elle converge. Par continuité de g, elle converge vers un point fixe de g. Or

$$g(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha.$$

On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
Vous devez justifier que la suite converge vers un point fixe de g puis que α est le seul point fixe de g. Il est inacceptable de voir encore des " la suite est croissante, majorée par α donc converge vers α ".

2. On revient au cas général.
   (a) On veut montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $Kh < 1$ et $[\alpha - h, \alpha + h] \subset [a,b]$.
   On choisit h tel que $0 < h < \min\left(\dfrac{1}{K}, \alpha - a, b - \alpha\right)$ ce qui est possible car le minimum est strictement positif. On a bien h comme on le souhaite.
   (b) On va montrer que pour un tel h fixé, on a $I = [\alpha - h, \alpha + h]$ stable par g. Soit $x \in I$, alors $x - \alpha \in [-h,h]$ et

$$\left|g(x) - \alpha\right| < K|x - \alpha|^2,$$

donc

$$\left|g(x) - \alpha\right| < Kh^2 \text{ puis } \left|g(x) - \alpha\right| < h,$$

puisque $Kh < 1$. On a donc

$$-h < g(x) - \alpha < h \text{ d'où } \alpha - h < g(x) < h + \alpha.$$

On a bien $g(x) \in I$ donc I est un intervalle stable par g.
Si $x_0 \in I$, par récurrence sur n, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tous les termes de la suite appartiennent à I.

On suppose dans toute la suite du problème que $x_0 \in I$.

(c) On veut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^n} \quad (*)$$

On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a $|x_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)$ qui est vraie. Soit n un entier tel que

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^n}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - \alpha| &\leqslant K\,|x_n - \alpha|^2 \\
&\leqslant K\left(\frac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^n}\right)^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant K\frac{1}{K^2}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^{n+1}} \\
&\leqslant \frac{1}{K}\Big(K|x_0 - \alpha|\Big)^{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier.

(d) Par le théorème des gendarmes, $|x_n - \alpha| \to 0$ donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.