Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 6

Devoir surveillé 6, sujet 2 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées, vos pages (et pas vos copies) doivent être numérotées, votre nom et classe doivent être mentionnés et tout ceci doit être fait durant le temps de composition. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Calculatrice interdite.

Exercice 1.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \neq b$.
On considère deux urnes U et V composées ainsi :
— l'urne U contient b boules blanches et a boules noires;
— l'urne V contient a boules blanches et b boules noires.
On se propose d'étudier une succession de tirages au hasard d'une boule dans ces deux urnes. *Après chaque tirage, la boule est remise* dans l'urne dont elle provient.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note
— U_n : « le n-ième tirage a lieu dans l'urne U »;
— B_n : « le n-ième tirage donne une boule blanche ».
On étudie deux protocoles différents dans les parties **I** et **II** puis on compare les résultats dans la partie **III**.

Partie I.— Le premier tirage a lieu dans l'urne U. Ensuite :
— si un tirage a donné une boule blanche, alors le tirage suivant a lieu dans l'urne U;
— si un tirage a donné une boule noire, alors le tirage suivant a lieu dans l'urne V.

1. Calculer $P(B_1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche pour la première fois au tirage numéro n.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(B_{n+1}) = \frac{b-a}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $P(B_n)$ en fonction de a, b et n.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n)$.

Partie II.— Le premier tirage a lieu dans l'urne U. Ensuite :
— si un tirage a donné une boule blanche, alors le tirage suivant a lieu dans la même urne;
— si un tirage a donné une boule noire, alors le tirage suivant a lieu dans l'autre urne.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement U_{n+1} en fonction des événements U_n, $\overline{U_n}$, B_n et $\overline{B_n}$.
2. En déduire que $P(U_{n+1}) = \frac{b}{a+b}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer alors $P(B_n)$ pour tout $n \geqslant 2$.

Partie III.— L'objectif est d'obtenir une boule blanche au dernier tirage.

1. Montrer que les deux protocoles sont équivalents si $n = 2$.
2. Quel est le protocole le plus favorable si $b > a$?
3. Le résultat reste-t-il vrai dans le cas général?

Exercice 2.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, contenant au moins deux points distincts et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est absolument monotone si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, et si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) \geqslant 0$$

Partie I

1. Dans chacun des cas suivants, préciser si la fonction f est absolument monotone :
   (a) $I = \mathbb{R}$ et $f = \exp$.
   (b) $I = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = |x|$.
   (c) $I =]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[\quad f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
2. On suppose ici que $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions absolument monotones.
   (a) Soit $(\lambda, \mu) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$. Montrer que la fonction $\lambda f + \mu g$ est absolument monotone.
   (b) Montrer que la fonction fg est absolument monotone.
   (c) Soit f absolument monotone, montrer que e^f est absolument monotone.
3. Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est absolument monotone :
   (a) $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in I \quad f(x) = \tan(x)$.
   (b) $I =]0,1[$ et $\forall x \in I \quad f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$.
   (c) $I =]0,1[$ et $\forall x \in I \quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (d) $I =]0,1[$ et $\forall x \in I \quad h(x) = \arcsin(x)$.
4. On suppose ici $I =]a,b[$, avec $a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction absolument monotone.
   (a) Montrer que la fonction f admet au point a une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.
   (b) On prolonge la fonction f en une fonction $\tilde{f} : [a,b[\to \mathbb{R}$ en posant $\tilde{f}(a) = \ell$. Montrer que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable au point a, et que la fonction dérivée $\tilde{f}'$ est continue au point a.
   (c) Plus généralement, démontrer que la fonction $\tilde{f}$ admet, à tous les ordres, des dérivées positives ou nulles au point a.
   (d) Le même phénomène se produit-il au point b, si $b \in \mathbb{R}$?

Partie II

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et tout réel positif t, on définit l'application $\Delta_t f$ en posant, pour tout réel x convenable :

$$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$$

Plus généralement, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\Delta_t^n f$ en posant

$$\Delta_t^0 f = f \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \Delta_t^{n+1} f = \Delta_t \left[\Delta_t^n f\right]$$

5. (a) Soient a et b des réels avec $a < b$. On suppose $I =]a, b[$.
   Quel est l'ensemble de définition de $\Delta_t f$?

   (b) Plus généralement, quel est l'ensemble de définition de $\Delta_t^n f$ pour $n \in \mathbb{N}$. ?

On suppose désormais $I = \mathbb{R}$.

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x,

$$\Delta_t^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kt)$$

   On procédera par récurrence, en exprimant très clairement l'hypothèse de récurrence.

6. Soit $t \geqslant 0$. On suppose, dans cette question seulement, que $f = \exp$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}, \Delta_t^n f(x)$. On simplifiera au maximum le résultat.

7. On veut montrer que si f est une fonction absolument monotone, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}, \Delta_t^n f(x) \geqslant 0$ (on dit alors que f est **totalement monotone**.)
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

   (a) On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit $\varphi_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \Delta_t^{n+1} f(x)$.

   (b) Exprimer $\varphi_f'(t)$ à l'aide $\Delta_t^n g$ où $g = f'$.

   (c) Conclure.

8. Dans cette question, on admet qu'une fonction dérivable n fois admet un DL d'ordre n en x, donné par

$$f(x+u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x) u^k}{k!} + u^n \epsilon(u),$$

   avec $\epsilon(u) \to 0$ quand $u \to 0$, et que les coefficients du DL sont uniques.

   On pose $\forall j \in [\![0, n]\!]], P_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{k^j}{j!}$.

   (a) En considérant la fonction $\psi : t \mapsto (e^t - 1)^n$, montrer que

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!]], P_j = 0 \text{ et } P_n = 1.$$

   (b) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \geqslant 0$,

$$\Delta_h^n f(x) = h^n f^{(n)}(x) + o(h^n).$$

   (c) Montrer qu'une fonction totalement monotone est absolument monotone.

Correction du DS n 6, sujet 2

Exercice 1

Franchement, ce n'est pas possible de ne pas réussir à faire les deux premières parties qui sont vraiment l'application directe du cours de probabilité. Faire impasse sur les probabilités parce que "je n'y comprends rien" est vraiment un très mauvais calcul alors arrêtez de penser que vous n'êtes pas apte à comprendre les probas et jetez-vous à l'eau. Pour info, j'ai piqué ce pb aux BCPST première année, qui n'ont donc, pour la plupart, pas suivi la spécialité maths alors évidemment que vous êtes capables de le faire.

Partie I.—

1. Le premier tirage a lieu dans l'urne U qui contient b boules blanches et a boules noires. On a donc $\boxed{P(B_1) = \dfrac{b}{a+b}.}$

   On évite de balancer la probabilité sans un minimum d'explication (comme le fait qu'on commence par un tirage dans l'urne U)

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons B l'événement « obtenir une boule blanche pour la première fois au tirage numéro n ».

   — Si $n = 1$ on a $B = B_1$ et on a vu à la question précédente que $\boxed{P(B_1) = \dfrac{b}{a+b}.}$

   — On suppose désormais que $n \geqslant 2$. Compte tenu du protocole de tirage dans cette partie, tant qu'on tire une boule noire, le tirage suivant a lieu dans l'urne V.
   On a alors
   $$B = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n.$$
   D'après la formule des probabilités composées, on a
   $$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n) \\ &= P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \times \cdots \times P_{\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}}}(B_n) \\ &= \frac{a}{a+b} \times \underbrace{\frac{b}{a+b} \times \cdots \times \frac{b}{a+b}}_{(n-2) \text{ termes}} \times \frac{a}{a+b} \\ &= \frac{a^2 b^{n-2}}{(a+b)^n}. \end{aligned}$$

   En conclusion, on a
   $$\boxed{P(B) = \frac{a^2 b^{n-2}}{(a+b)^n} \text{ si } n \geqslant 2.}$$

   On commence par écrire l'évènement dont on cherche la probabilité (avec des intersections) puis on cite la formule que l'on utilise. Certains m'ont écrit que l'on recherchait une probabilité conditionnelle, ce qui est faux.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule $P(B_{n+1})$ avec la formule des probabilités totales appliquée au le sys-

tème complet d'événements $(B_n, \overline{B_n})$. On obtient

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n}) \\
&= \frac{b}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}P(\overline{B_n})
\end{aligned}$$

car si B_n est réalisé, le tirage suivant a lieu dans l'urne U, de même si $\overline{B}_n$ est réalisé.

$$\begin{aligned}
&= \frac{b}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}(1-P(B_n)) \\
&= \frac{b-a}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(B_{n+1}) = \frac{b-a}{a+b}P(B_n) + \frac{a}{a+b} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

Là encore, on cite la formule utilisée et le SCE que l'on considère. Comme on veut $P(B_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$, c'est naturel de choisir $(B_n, \overline{B}_n)$ comme SCE. Certains ont voulu raisonner avec $(U_{n+1}, \overline{U}_{n+1})$, ce qui est possible car $U_{n+1} = B_n$ avec ce protocole. En revanche, raisonner avec $(U_n, \overline{U}_n)$ ne mène nulle part.

(b) On cherche $c \in \mathbb{R}$ tel que $c = \frac{b-a}{a+b}c + \frac{a}{a+b}$ ce qui donne après calculs $c = \frac{1}{2}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = b_n - \frac{1}{2}$ est donc géométrique de raison $\frac{b-a}{a+b}$ et de premier terme $v_1 = b_1 - \lambda = \frac{b}{a+b} - \frac{1}{2} = \frac{b-a}{2(a+b)}$; on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = v_1 \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n-1} = \frac{b-a}{2(a+b)} \times \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(B_n) = b_n = v_n - c = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n + \frac{1}{2}.}$$

Donc vous saviez calculer le terme général d'une suite géométrique au DS5 et là vous ne savez plus ? Globalement, vous avez trouvé $\frac{1}{2}$ mais beaucoup ont pris $P(B_1)$ pour premier terme de la suite géométrique $\left(P(B_n) - \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de $\frac{b}{a+b} - \frac{1}{2}$. Certains aussi ont mis une puissance n au lieu de $n-1$ alors que le premier terme est celui d'indice 1 (et pas 0).

(c) On a $-1 < \frac{b-a}{a+b} < 1 \Leftrightarrow -(a+b) < b-a < a+b$ ce qui est vrai car a et b sont positifs. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \frac{1}{2}.}$

J'ai vu beaucoup de $\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n \to 0$ car $\frac{b-a}{a+b} < 1$ ce qui est faux (mais vraiment, pensez à $(-3)^n$.

Partie II.—

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement U_{n+1} se réalise si et seulement si le $(n+1)$-ième tirage a lieu dans l'urne U, c'est-à-dire si et seulement si :
   — le n-ième tirage a eu lieu dans U et a donné une boule blanche ;
   — OU le n-ième tirage a eu lieu dans V et a donné une boule noire.
   Ainsi $\boxed{U_{n+1} = (U_n \cap B_n) \cup (\overline{U_n} \cap \overline{B_n}).}$

   Un minimum d'explication est évidemment nécessaire.

2. Les événements $(U_n \cap B_n)$ et $(\overline{U_n} \cap \overline{B_n})$ sont incompatibles donc

$$P(U_{n+1}) = P(U_n \cap B_n) + P(\overline{U_n} \cap \overline{B_n})$$

puis, avec la formule des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P_{U_n}(B_n)P(U_n) + P_{\overline{U_n}}(\overline{B_n})P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(U_n) + \frac{b}{a+b}P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(U_n) + \frac{b}{a+b}(1-P(U_n)) \\ &= \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(U_{n+1}) = \dfrac{b}{a+b} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Là encore, on précise que les évènements sont incompatibles (et on évite de parler de réunion disjointe, il y a un vocabulaire spécifique pour les probas, c'est celui-là que vous devez utiliser).

3. Soit n un entier $\geqslant 2$. On calcule $P(B_n)$ avec la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements $(U_n, \overline{U_n})$:

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P_{U_n}(B_n)P(U_n) + P_{\overline{U_n}}(B_n)P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b}P(U_n) + \frac{a}{a+b}P(\overline{U_n}) \\ &= \frac{b}{a+b} \times \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}\left(1 - \frac{b}{a+b}\right) \\ &= \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(B_n) = \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \text{ pour tout entier } n \geqslant 2.}$

Partie III.—

1. On calcule la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage dans les deux protocoles. Pour le premier,

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \overline{B_1}) \text{ car } (B_1, \overline{B_1}) \text{ est un SCE} \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P_{\overline{B_1}}(B_2) \text{ par la formule des probas totales} \\ &= \frac{a}{a+b} \times \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \times \frac{b}{a+b} \\ &= \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \end{aligned}$$

On obtient bien la même probabilité qu'avec le deuxième protocole.

2. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} > \frac{(b-a)^n}{2(a+b)^n}+\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\quad & 2(a^2+b^2)(a+b)^{n-2} > (b-a)^n+(a+b)^n\\
\Leftrightarrow\quad & (a+b)^{n-2}\left(2a^2+2b^2-(a+b)^2\right) > (b-a)^n\\
\Leftrightarrow\quad & (a+b)^{n-2}\left(a^2-2ab+b^2\right) > (b-a)^n\\
\Leftrightarrow\quad & (a+b)^{n-2} > (b-a)^{n-2} \text{ en divisant par } (b-a)^2>0
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie par croissance de $x \mapsto x^{n-2}$ sur $\mathbb{R}^+$, car $a+b>b-a>0$. Par équivalence, on a montré que le deuxième protocole est plus favorable dans le cas où $b>a$.

On peut aussi montrer comme Arthur que si $b>a$, alors la suite arithmético-géométrique est décroissante donc majorée à partir de l'indice 2 par son terme d'indice 2 qui correspond à la probabilité avec le second protocole.

3. Dans le cas général, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_1(B_n)=\frac{1}{2}$, en notant P_1 la probabilité avec le premier protocole. Or
$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(a^2+b^2)>(a+b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2>0$$
donc, par équivalence, $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}>\dfrac{1}{2}$. On en déduit que pour n grand, la probabilité avec le deuxième protocole sera plus favorable que celle avec le premier protocole.

Exercice 2 **Partie I**

1. Dans chacun des cas suivants, préciser si la fonction f est absolument monotone :
   (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}=f$ et $f\geqslant 0$ donc f est donc absolument monotone.
   (b) Soit $I=\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=|x|$. La fonction f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, elle n'est donc pas absolument monotone.
   (c) Soit $I=]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[\quad f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

   Pour tout $x\in I, f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ et on montre, par récurrence sur n, que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in I$,
   $$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^n}.$$
   On a bien $\forall n\in\mathbb{N}, f^{(n)}\geqslant 0$ donc f est absolument monotone.

   Inutile de faire une récurrence ici

2. On suppose ici que $f: I\to\mathbb{R}$ et $g: I\to\mathbb{R}$ sont des fonctions absolument monotones.
   (a) Soit $(\lambda,\mu)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2$. Montrons que la fonction $\lambda f+\mu g$ est absolument monotone. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par linéarité de la dérivation on a $\left(\lambda f+\mu g\right)^{(n)}=\lambda f^{(n)}+\mu g^{(n)}$. Or, les réels λ et μ sont positifs et, par hypothèse, $f^{(n)}\geqslant 0$ et $g^{(n)}\geqslant 0$. On a donc bien $\forall n\in\mathbb{N}, \left(\lambda f+\mu g\right)^{(n)}\geqslant 0$ donc $\lambda f+\mu g$ est absolument monotone.

   N'oubliez pas de parler de linéarité de la dérivation ou, à minima, écrire $(\lambda f+\mu g)^{(k)}=\lambda f^{(k)}+\mu g^{(k)}$.

(b) Montrons que la fonction fg est absolument monotone.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Or, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $n-k \in [\![0,n]\!]$ donc, par hypothèse, tous les termes de la somme sont positifs. Ceci étant valable pour tout entier n, on en déduit que fg est absolument monotone.

On peut s'en sortir par récurrence en utilisant les questions précédentes mais c'est moins joli.

3. On raisonne par récurrence forte sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note HR(n) :" $(e^f)^{(n)} \geqslant 0$ ".

Pour $n = 0$, $e^f \geqslant 0$ donc l'initialisation est vérifiée. On peut aussi regarder $(e^f)' = f'e^f$. Par hypothèse, $f' \geqslant 0$ donc on a bien $(e^f)' \geqslant 0$.

Soit maintenant n un entier tel que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\left(e^f\right)^{(k)} \geqslant 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\left(e^f\right)^{(n+1)} &= \left(f'e^f\right)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(n-k)} \left(e^f\right)^{(k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} \left(e^f\right)^{(k)}\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, chacun des termes de la somme est positif donc on a bien $\left(e^f\right)^{(n+1)} \geqslant 0$. Par le principe de récurrence forte, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\left(e^f\right)^{(n)} \geqslant 0$ donc e^f est bien absolument monotone.

On ne peut pas conclure par récurrence simple. Dire que $(e^{(f)})^{(k)}$ est le produit de puissances de f et de e^f est faux. Enfin, attention à ne pas faire de récurrence en supposant que $(e^f)^{(n)}$ est absolument monotone car, si c'est le cas, $(e^f)^{(n+1)}$ l'est et vous ne montrez rien.

4. Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est absolument monotone :

(a) Soit $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in I \quad f(x) = \tan(x)$.

On procède par récurrence forte sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note HR(n) :" $\tan^{(n)} \geqslant 0$.

Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ car on se place sur un intervalle sur lequel la tangente est positive. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\tan^{(k)} \geqslant 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\tan^{(n+1)} &= \left(1+\tan^2\right)^{(n)} \text{ car } \tan' = 1+\tan^2 \\ &= \left(\tan^2\right)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} \text{ d'après la formule de Leibniz}\end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $n-k \in [\![0,n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, chacun des termes de la somme est positif. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)} \geqslant 0$ par le principe de récurrence forte.

Il est également possible de montrer, par récurrence, que $\tan^{(n)}$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs de puissance de tangente mais c'est plus long. Il est aussi possible de montrer, toujours par récurrence sur k, que $\tan^{(k)} = \frac{P_k(\sin)}{\cos^{k+1}}$ où P_k est un polynôme à coefficients positifs mais il faut être rigoureux dans l'énoncé de la récurrence et poser $HR(n)$: " $\tan^{(k)} = \frac{P_k(\sin)}{\cos^{k+1}}$ où P_k est un polynôme de degré $k+1$ à coefficients positifs".

(b) Soit $I =]0,1[$ et $\forall x \in I \quad f(x) = \frac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+x)^2}$, puis, par récurrence sur n,

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^n} + \frac{n!(-1)^{n+1}}{(1+x)^n}.$$

On remarque ensuite que pour tout $x \in]0,1[$, $(1+x)^n + (1-x)^n \geqslant 0$ et $(1+x)^n - (1-x)^n \geqslant 0$. On en déduit que $\forall x \in I, f^{(n)}(x) \geqslant 0$ et, ceci étant valable pour tout entier n, f est absolument monotone.

Trouver la formule pour la dérivée kème ne suffit pas, il faut montrer sa positivité. Réduire au même dénominateur les deux fractions n'est pas judicieux et $x \mapsto -\dfrac{1}{1+x}$ n'est pas absolument monotone puisque sa dérivée seconde est négative.

(c) Soit $I =]0,1[$ et $\forall x \in I \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On remarque que $\forall x \in I, \ln(g(x)) = -\dfrac{1}{2}(\ln(1-x) + \ln(1+x))$ donc

$$(\ln(g))' = \frac{1}{2} f.$$

On en déduit que $\forall n \geqslant 1, \ln(g)^{(n)} \geqslant 0$. par ailleurs, comme $1-x \in]0,1[$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant 1$ donc $\ln(g) \geqslant 0$. On en déduit que $\ln(g)$ est absolument monotone. D'après la question 3, on en déduit que $g = e^{\ln(g)}$ est absolument monotone.

(d) $I =]0,1[$ et $\forall x \in I \quad h(x) = \arcsin(x)$.

Pour tout $x \in I$, $h(x) \geqslant 0$ car arcsin est du même signe que x. Par ailleurs, $h' = g$ et g est absolument monotone d'après la question précédente. On en déduit que h est absolument monotone.

5. On suppose ici $I =]a,b[$, avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction absolument monotone.

(a) La fonction f est croissante, elle admet donc au point a une limite (finie ou non). Par ailleurs, comme on a supposé que f était positive, elle est minorée. Cette limite est donc finie et on a montré qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Vous ne pouvez pas parler de limite sans avoir justifier son existence. La continuité de f ne suffit pas.

(b) On prolonge la fonction f en une fonction $\tilde{f} : [a,b[\to \mathbb{R}$ en posant $\tilde{f}(a) = \ell$. La fonction f' est croissante (car sa dérivée f" est positive), elle admet donc une limite en a. À nouveau, parce que f' est positive, on peut affirmer que cette limite est finie. Par le thm de la limite de la dérivée, cela montre que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable au point a, et que la fonction dérivée $\tilde{f}'$ est continue au point a puisque $\tilde{f}'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$.

Attention à bien justifier l'existence d'une limite finie pour f' en a par des arguments similaires à la question précédente. En revanche, on vous demande la dérivabilité de $\tilde{f}$ en a, pas un éventuel prolongement par continuité de $\tilde{f}'$.

(c) On raisonne, de même : Pour tout entier n, $\tilde{f}^{(n+2)}$ est positive donc $f^{(n+1)}$ est croissante et positive, elle admet donc une limite finie, positive, en a. On en déduit, par le thm de la limite de la dérivée, que $\tilde{f}^{(n)}$ est dérivable en a et que $\tilde{f}^{(n+1)}(a) \geqslant 0$.

(d) Le même phénomène ne se produit pas au point b, si $b \in \mathbb{R}$ car on ne sait pas si la fonction est majorée. En effet, on peut considérer l'exemple 1c où la fonction n'est pas prolongeable par continuité en 1.

Partie II Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et t un réel positif. On définit l'application $\Delta_t f$ en posant, pour tout réel x convenable :

$$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$$

Plus généralement, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\Delta_t^n f$ en posant

$$\Delta_t^0 f = f \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \Delta_t^{n+1} f = \Delta_t \left[\Delta_t^n f\right]$$

6. (a) Soient a et b des réels avec $a < b$. On suppose $I =]a, b[$.
On remarque, tout d'abord, qu'il faut $t < b-a$. Dans ce cas, on doit avoir $(x, x+t) \in]a, b[$ donc $x \in]a, b-t[$. On a donc $\mathscr{D}_{\Delta_t f} =]a, b-t[$.

   (b) Plus généralement, l'ensemble de définition de $\Delta_t^n f$ pour $n \in \mathbb{N}$ est $]a, b-nt[$, sous réserve que $nt < b-a$ afin que cet ensemble ne soit pas vide.

   C'est une perte de temps de montrer ceci par récurrence

   On suppose désormais $I = \mathbb{R}$.

7. On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x,

$$\Delta_t^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kt)$$

Comme suggéré dans l'énoncé, on procède par récurrence sur n en posant HR(n) :" $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta_t^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kt)$.

Pour $n = 0$, on a $\Delta_t^0 f = f$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la somme pour $n = 0$ ne contient qu'un terme égal à $f(x)$, on a bien égalité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $HR(n)$ est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$ On a alors

$$\begin{aligned}
\Delta_t^{n+1} f(x) &= \Delta_t^n f(x+t) - \Delta_t^n f(x) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+t+kt) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kt) \\
&\quad \text{en appliquant l'hypothèse de récurrence pour } f(x) \text{ et } f(x+t) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+(k+1)t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kt) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n-k+1} f(x+kt) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+kt) \\
&\quad \text{en faisant un changement d'indice dans la première somme} \\
&= f(x+(n+1)t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} (-1)^{n+1-k} - \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\right) f(x+kt) - (-1)^n f(x) \\
&\quad \text{en enlevant le dernier terme de la première somme et le premier de la dernière} \\
&= f(x+(n+1)t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) (-1)^{n+1-k} f(x+kt) + (-1)^{n+1} f(x) \\
&= f(x+(n+1)t) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1} f(x+kt) + (-1)^{n+1} f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1} f(x+kt)
\end{aligned}$$

en remarquant que le premier terme correspond à $k = n+1$ et le dernier à $k = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on bien l'égalité souhaitée au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

On vous demande d'énoncer clairement l'hypothèse de récurrence afin que vous arriviez à faire correctement l'hérédité. En effet, si vous ne supposez pas que $\Delta_t^n f(x)$ s'exprime comme une somme pour tout x, *alors vous ne pouvez remplacer $\Delta_t^n f(x+t)$ par une somme. Pensez à détailler votre raisonnement, surtout quand il y a de nombreuses lignes de calcul. Pour peu que vous ne fassiez pas exactement comme ci-dessus, on peut vraiment avoir du mal à comprendre ce que vous avez en tête.*

8. On pose ici $f = \exp$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = f$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors, en utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
&\Delta_t^n f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{x+kt} \\
&= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(e^t\right)^k \\
&= e^x (e^t - 1)^n.
\end{aligned}$$

Certains me l'ont fait par récurrence, pourquoi pas.

9. On veut montrer que si f est une fonction absolument monotone, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}, \Delta_t^n f(x) \geqslant 0$ (on dit alors que f est **totalement monotone.**)

   (a) Pour cela on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit $\varphi_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \Delta_t^{n+1} f(x)$

   Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a $\varphi_f(t) = \Delta_t^{n+1} f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} f(x+kt)$ d'après la question 7. On a donc

$$\begin{aligned}
\varphi_f'(t) \quad &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} k f'(x+kt) \text{ par linéarité de la dérivation} \\
&= (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n+1-k} f'(x+kt) \\
&= (n+1) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} g(x+(j+1)t) \text{ en posant } j = k-1 \\
&= (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} g\left((x+t)+jt\right) \\
&= \Delta_t^n g(x+t)
\end{aligned}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $\varphi_f'(t) = \Delta_t^n g(x+t)$.

   Là il ne faut pas s'emmêler les pinceaux, on dérive par rapport à t.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose HR(n) :" pour tout fonction absolument monotone h, on a $\Delta_t^n h \geqslant 0$".
   On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, si h est absolument monotone, alors $\Delta_t^0 h = h$ et h est positive, par hypothèse, donc on a bien $\Delta_t^n h \geqslant 0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toute fonction absolument monotone h, $\Delta_t^n h \geqslant 0$.
   Soit f une fonction absolument monotone, montrons que $\Delta_t^{n+1} f \geqslant 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a, pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi_f'(t) = \Delta_t^n g(x+t)$ avec $g = f'$. Or f est absolument monotone donc f' aussi. Par hypothèse de récurrence, $\Delta_t^n g \geqslant 0$ donc φ_f' est croissante. Par ailleurs, $\varphi_f(0) = \Delta_0^{n+1} f(x) = 0$. On en déduit que pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi_f(t) \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $\Delta_t^{n+1} f(x) \geqslant 0$ ce qui achève l'hérédité. Par le principe de récurrence, on a montré que si f est absolument monotone, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_t^n f \geqslant 0$

Je vous l'accorde, celle-là n'était pas simple.

10. On pose $\forall j \in [\![1, n]\!]]$, $P_j = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{k^j}{j!}$.

(a) Montrons qu'une fonction totalement monotone est positive et croissante. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit donc f totalement monotone c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_t^n f \geqslant 0$. Pour $n = 0$, on a $\Delta_t^0 f = f \geqslant 0$ donc f est bien positive.

Soit maintenant $x \leqslant y$, alors, en posant $t = y - x$, on a

$$f(y) - f(x) = \Delta_t f(x) \geqslant 0,$$

donc on a bien f croissante.

(b) On considère la fonction $\psi : t \mapsto (e^t - 1)^n$. D'une part, on a

$$\psi(t) = t^n + o(t^n).$$

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kt} (-1)^{n-k},$$

alors $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\psi^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^j e^{kt} (-1)^{n-k},$$

donc

$$\psi^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^j (-1)^{n-k} = j! P_j.$$

On a donc, d'après la formule de Taylor-Young :

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} t^j + o(t^n) = \sum_{k=0}^{n} P_j t^j + o(t^n).$$

Par unicité du DL, on a

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!]], P_j = 0 \text{ et } P_n = 1.$$

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $h \geqslant 0$.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \geqslant 0$, on a

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x + kh),$$

et, d'après la formule de Taylor,

$$f(x + kh) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j k^j + h^n \epsilon(h),$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\Delta_h^n f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j k^j + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} h^n \epsilon(h) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{k^j}{j!} \right)}_{=P_j} f^{(j)}(x) h^j + h^n \epsilon(h) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} h^n \right) \\
&= f^{(n)}(x) h^n + h^n E(h)
\end{aligned}$$

en posant $E(h) = \epsilon(h) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} h^n \right)$. La somme étant finie, elle est bornée au voisinage de h. On en déduit que $E(h) \to 0$ donc on a bien

$$\Delta_h^n f(x) = h^n f^{(n)}(x) + o(h^n).$$

Il faut bien justifier le $o(h^n)$.

(d) Soit f totalement monotone. On a donc $\forall t \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta_t^n f \geqslant 0$. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{(k)} \geqslant 0$. On sait déjà que f est positive et croissante. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente, on a, pour tout $h \geqslant 0$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} - E(h),$$

donc $f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} - E(h)$. Or, par hypothèse, $\frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} \geqslant 0$ et $E(h) \to 0$ donc

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} \geqslant 0.$$

On a donc bien $f^{(n)}(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in R$ donc f est absolument monotone.

Vous ne pouvez rien dire du signe tant que vous avez un $o(h^n)$, c'est pour ça que l'on passe à la limite.