Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2024-2025
Feuille 15

TD 15: Polynômes.

---

1 Autour des coefficients

Exercice 1.
Soit n un entier naturel non nul. Soit $A_n = (X+i)^n - (X-i)^n$. Quel est le terme dominant de A_n ?

Exercice 2.
Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = P(-X)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$

Exercice 3.
Trouver les solutions polynômiales des équations différentielles suivantes:

1. $xy" + 2xy' - 3y = x^3 + 2x^2 - 2$
2. $xy" + 2xy' - 8y = 0$

2 Polynômes et dérivée

Exercice 4.
Soit $P_n = (X(X-1))^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$.

1. Déterminer $L_n(1)$.
2. Déterminer le degré de L_n et son terme dominant.

Exercice 5.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et admettant pour racines distinctes $a_1, \ldots, a_n$. Montrer que

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - a_k}.$$

Division euclidienne

Exercice 6.
Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que X^2+2 divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

Exercice 7.
Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M^2 - 9I_3 = (0)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 9$.
3. En déduire, pour tout entier n, M^n.

Exercice 8.
Montrer que $X(X-2)$ divise $(X-1)^4 + (X-1)^2 - 2$.

Exercice 9.
Calculer le reste de la division euclidienne de $P_n = (X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 10.
Soient n, d des entiers naturels. On suppose que $n = qd + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < d$.

1. Montrer que $X^n - 1 = X^r(X^{qd} - 1) + (X^r - 1)$ puis donner le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^d - 1$.
2. En déduire que:
$$X^d - 1 \text{ divise } X^n - 1 \Leftrightarrow d \text{ divise } n$$

3 Racines multiples

Exercice 11.
Soient P et Q tel que $P^2 = (X-1)Q^2$. Montrer que $P = Q = 0$.

Exercice 12.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer qu'il en est de même de P'. Montrer ensuite que le polynôme P^2+1 n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

4 Racines et factorisation

Exercice 13.
Décomposer $X^6 + X^3 + 1$ sur $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14.
Soit $P(X) = X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5$. Montrer que i est racine de P. En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ (en produit de polynômes irréductibles) de P.

Exercice 15.
Factoriser $(X^2+1)^2+(X^2-X-1)^2$ sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16.
Factoriser X^7-3 sur $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

5 Nombre de racines

Exercice 17.

Soit P et Q deux polynômes tels que $P(n)=Q(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Montrer que $P=Q$.

Exercice 18.

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ de degré $n\geqslant 2$. Montrer que la fonction polynômiale associée admet au plus n points fixes.

6 Équation fonctionnelle

Exercice 19.
Trouver $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$.

Exercice 20. ⚙
Soit P un polynôme non-nul unitaire vérifiant :

$$P(X)P(X-1)=P(X^2)$$

1. Vérifiez que si z est racine de P alors z^2 est racine de P, puis que z^{2^k} est racine de P pour tout entier naturel k.
2. Montrez que les racines de P sont de module 0 ou 1.
3. Vérifiez que si z est racine de P alors $(z+1)^2$ est racine de P et trouvez toutes les racines possibles de P.
4. Montrez que les polynômes vérifiant l'équation fonctionnelle ci-dessus sont les puissances de X^2+X+1.

Exercice 21.
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Soit P un polynôme unitaire vérifiant : $(X+1)P'=nP$.

1. Trouvez le degré de P.
2. Trouvez une relation de récurrence entre les coefficients de P.
3. Calculez ces coefficients et vérifiez que P s'exprime comme le produit d'une constante et d'une puissance d'un polynôme de degré 1.
4. Retrouvez ce résultat avec la notion de multiplicité.

7 Fractions rationnelles

Exercice 22.

Déterminer la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^2+1}{X(X^2-1)}$.
2. $\dfrac{3X^2+3}{X^3+2X^2-X-2}$.
3. $\dfrac{X^2+1}{X^2+4}$.

Exercice 23.

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\cos^3 t+\cos^5 t}{\sin^2 t+\sin^4 t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$

8 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 24.
Soient $n\in\mathbb{N}^\star$ et $P_n=((X^2+3X-5)^n)^{(n)}$. Quel est le terme dominant de P_n ?

Exercice 25.
Effectuer la division euclidienne de A par B lorsque :

1. $A(X)=X^7-2X+1$ et $B(X)=X^2-1$
2. $A(X)=3X^5+4X^2+1$ et $B(X)=X^2+2X+3$

Exercice 26.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(X)=X^7-3X^5-2X^4+5$ par X^2-3X+2 puis par $(X+1)^2$.

Exercice 27.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^{2n}+(X-2)^n-2$ par X^2-3X+2.

Exercice 28.
Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, montrer que X^3+X^2+X+1 divise le polynôme $X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}$.

Exercice 29.
Montrer que $(X+1)^{2017}-X^{2017}-1$ est divisible par X^2+X+1.

Exercice 30.
Soit $n\geq 2$ et $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}X^k\in\mathbb{R}[X]$. Le polynôme P_n a-t-il une racine multiple dans $\mathbb{C}$?

Exercice 31.
Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par leur dérivée.

Exercice 32.
Soit $n>2$. Montrer que $X^n+2X+n-1$ n'a que des racines simples.

Exercice 33.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose :

$$P_n(X)=nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$$

1. Calculer la multiplicité de 1 en tant que racine de P_n pour tout n.
2. Factoriser P_1,P_2 et P_3 sous forme d'un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 34.
Soit un entier $n\geqslant 2$.
Montrer que le polynôme $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$ est divisible par $(X-1)^3$.

Exercice 35.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$.

Exercice 36.
Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine du polynôme $X^{2n+1}-(2n+1)X^{n+1}+(2n+1)X^n-1$.

Exercice 37.
Factoriser $X^4-14X^2+24X-8$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il possède une racine multiple.

Exercice 38.
Factoriser $P(X)=X^4+2X^3+4X^2+2X+3$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ sachant que i est racine.

Exercice 39.
Déterminer les racines de $5X^4+10X^2+1$.

Exercice 40.
Déterminer les racines du polynôme $P(X)=X^4+X^3+X^2+X+1$.

Exercice 41.
Factoriser $X^6-2X^3\cos(6\theta)+1$ sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 42.
Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P(\arctan(x))=0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer que P est nul.

Exercice 43.

Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{5}{(X+1)^5-X^5-1}$.

Exercice 44.

Calculer la primitive suivante:
$$\int^x \frac{\cos t-\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

9 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 45.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ de degré n tel que $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(1)=k$.

Exercice 46.
Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit $P(X)\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall n\leqslant\deg(P)$, on a $P^{(n)}(a)>0$. Montrer que l polynôme P n'admet pas de racine dans l'intervalle $[a;+\infty[$.

Exercice 47.

1. Montrer que pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$, $P(X)-X$ divise $P\circ P(X)-X$.
2. En déduire les solutions de $(x^2-3x+1)^2=3x^2-8x+2$.

Exercice 48.
Soit $P(X) = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1} \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer les racines de P. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 49.
Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $(B, C) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $A = B^2 + C^2$.

Exercice 50.
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \overline{z}$.

Exercice 51.
Déterminer les polynômes P vérifiant

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

Exercice 52.
Déterminer les polynômes P vérifiant $P'P$” $= 18P$.

Exercice 53.
Déterminer les polynômes tels que $P(X+1) - P(X) = X$.

Memo

- Comment déterminer les racines d'un polynôme?
  - Trouver des racines et factoriser
  - Faire un changement de variable
  - Utiliser les relations coefficients/racines
- Comment factoriser un polynôme en facteurs irréductibles?
  Chercher les racines sur **C** (puis grouper les racines conjuguées deux à deux pour trouver les facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$).
- Comment déterminer le reste/quotient de la division euclidienne?
  Prendre des valeurs particulières judicieusement choisies.
- Comment montrer que $A|B$?
  Comparer les racines
- Comment déterminer le degré/terme dominant?
  - Faire une récurrence
  - Étudier les coefficients
- Comment montrer qu'un polynôme est nul ?
  - Supposer qu'il ne l'est pas et chercher une contradiction.
  - Montrer qu'il a "trop" de racines.
- Comment résoudre une équation fonctionnelle?
  Déterminer le degré et les racines