Correction du TD n 15

Correction 1 1. On a $A_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^{n-k}X^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-i)^{n-k}X^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i^{n-k} - (-i)^{n-k})X^k$. Pour $k = n$, le coefficient devant X^n est nul; pour $k = n-1$, le coefficient est $2ni \neq 0$ donc le terme dominant de A^n est $2niX^{n-1}$.

2. On remarque que le terme dominant de $Q_n = (X^2+3X-5)^n$ est X^{2n}, le terme dominant de Q_n' est donc $2nX^{2n-1}$, celui de $Q_n^{(2)}$ est $2n(2n-1)X^{2n-2}$ et par une récurrence descendante, on obtient que le terme dominant de P_n est $2n(2n-1)\dots(n+1)X^n$ autrement dit $\frac{(2n)!}{n!}X^n$.

Correction 2 Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ un tel polynôme. On a alors $P(-X) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^kX^k$ donc, par unicité de l'écriture :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k = (-1)^k a_k,$$

ce qui impose $a_k = 0$ pour tout k impair. On a alors $P = \sum_{j=0}^{m} a_{2j}X^{2j}$ avec $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

En posant $Q = \sum_{j=0}^{m} a_{2j}X^j$, on a bien $Q(X^2) = P(X)$.

Correction 3 1. Soit y une solution polynomiale de l'équation de terme dominant a_nx^n. Le terme dominant de xy" est $n(n-1)a_nx^{n-1}$, celui de $2xy'$ est $2na_nx^n$ donc le coefficient devant x^n du membre de gauche est $(2n-3)a_n$. Il est non-nul, c'est donc le coefficient dominant, il faut par conséquent chercher une solution sous la forme d'un polynôme de degré 3. On cherche y sous la forme ax^3+bx^2+cx+d. On a $y' = 3ax^2+2bx+c$ et $y" = 6ax+2b$. La fonction y est solution si et seulement si

$$-3ax^3 - 3bx^2 - 3cx - 3d = x^3 + 2x^2 - 2.$$

Par unicité des coefficients, on identifie :

$$\begin{cases} 3a &= 1 \\ 6a+b &= 2 \\ 2b-c &= 0 \\ -3d &= -2 \end{cases},$$

ce qui impose $a = \frac{1}{3}$, $b = 0 = c$ et $d = \frac{2}{3}$ donc le seul polynôme solution est $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$.

2. Le polynôme nul est solution. Cherchons le degré d'une solution non nulle. On regarde les termes dominants de chaque terme. Si y est de terme dominant a_nx^n, alors xy" est de terme dominant $n(n-1)a_nx^{n-1}$ et $2xy'$ est de terme dominant $2na_nx^n$. Pour obtenir un polynôme nul, on doit donc avoir $2na_n - 8a_n = 0$ d'où $n = 4$. On pose $y = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. On a $y' = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ et $y" = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$. La fonction y est solution si et seulement si

$$(12a_4 - 2a_3)x^3 + (6a_3 - 4a_2)x^2 + (2a_2 - 6a_1)x - 8a_0 = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 12a_4 - 2a_3 &= 0 \\ 6a_3 - 4a_2 &= 0 \\ 2a_2 - 6a_1 &= 0 \\ -8a_0 &= 0 \end{cases}$$

puis à :

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 3a_4 \\ a_2 &= 9a_4 \\ a_3 &= 6a_4 \end{cases}.$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$P = a_4(x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 3x), a_4 \in \mathbb{R}$$

Correction 4 1. Posons $g : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto (x-1)^n$. On sait que pour tout $k \leqslant n$, on a $g^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ et $h^{(n-k)}(x) = \dfrac{n!}{k!}(x-1)^k$. D'après la formule de Leibniz, on a :

$$(gh)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 n!x^{n-k}(x-1)^k.$$

Tous les termes de cette somme s'annulent en 1 sauf pour $k = 0$. On en déduit que

$$L_n(1) = \binom{n}{0}^2 n! = n!.$$

2. Pour déterminer le terme dominant de L_n, on remarque que celui de P_n est X^{2n}. En le dérivant n fois, on obtient le terme dominant de L_n qui vaut $\dfrac{(2n)!}{n!}X^n$.

Correction 5 Le polynôme P s'écrit $\alpha\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$. Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on pose $P_j(X)=\prod_{k=1}^{j}(X-a_j)$. On va raisonner par récurrence sur $j\leqslant n$. Si $j=2$, on a $P_2(X)=\alpha(X-a_1)(X-a_2)$ et $P_2'(X)=\alpha(X-a_2)+\alpha(X-a_1)$ donc $\frac{P_2'(X)}{P_2(X)}=\frac{1}{X-a_1}+\frac{1}{X-a_2}$. Le résultat est donc vrai pour $j=2$. On suppose donc que :

$$\frac{P_j'(X)}{P_j(X)}=\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{X-a_k},$$

et nous allons montrer que

$$\frac{P_{j+1}'(X)}{P_{j+1}(X)}=\sum_{k=1}^{j+1}\frac{1}{X-a_k}.$$

Pour cela, on écrit $P_{j+1}(X)=(X-a_{j+1})P_j(X)$, alors $P_{j+1}'(X)=P_j(X)+(X-a_{j+1})P_j'(X)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{P_{j+1}'(X)}{P_{j+1}(X)}&=\frac{P_j(X)+(X-a_{j+1})P_j'(X)}{(X-a_{j+1})P_j(X)}\\&=\frac{1}{X-a_{j+1}}+\frac{P_j'(X)}{P_j(X)}\\&=\frac{1}{X-a_{j+1}}+\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{X-a_k}\text{par hypothèse de récurrence}\\&=\sum_{k=1}^{j+1}\frac{1}{X-a_k}\end{aligned}$$

Le résultat est vrai au rang $j+1$. Par le principe de récurrence, il est vrai pour tout $j\leqslant n$ donc pour n.

Correction 6 On sait que le reste de la division euclidienne de $X^4+X^3+aX^2+bX+2$ par X^2+2 est de degré au plus 1, il est donc de la forme $\alpha X+\beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Il existe donc $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$X^4+X^3+aX^2+bX+2=Q(X)(X^2+2)+\alpha X+\beta.$$

Pour $X=i\sqrt{2}$, on obtient

$$4-2i\sqrt{2}+2a+ib\sqrt{2}+2=\alpha i\sqrt{2}+\beta.$$

On identifie les parties réelles et imaginaires, on trouve $\alpha=b-2$ et $\beta=6+2a$. Le reste vaut donc $(b-2)X+(6-2a)$. Il est nul si et seulement si $b=2$ et $a=3$.

Correction 7 1. OK

2. On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme Q_n et deux réels a_n et b_n tels que

$$X^n=(X-3)(X+3)Q_n(X)+a_nX+b_n.$$

En évaluant en 3 et -3, on obtient le système suivant

$$\begin{cases}3a_n+b_n=3^n\\-3a_n+b_n=(-3)^n\end{cases}$$

En additionnant les deux lignes, on obtient $b_n=\frac{3^n+(-3)^n}{2}$, en faisant la différence on obtient $a_n=\frac{3^n-(-3)^n}{6}$ donc $X^n=(X-3)(X+3)Q(X)+\frac{1}{6}(3^n-(-3)^n)X+\frac{1}{2}(3^n+(-3)^n)$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$, alors

$$M^n=(M-3I_3)(M+3I_3)Q_n(M)+a_nM+b_nI_3,$$

or $(M-3I_3)(M+3I_3)=(0)$ d'après la première question, on a donc

$$M^n=a_nM+b_nI_3,$$

d'où $M^n=\begin{pmatrix}\frac{3^n+5(-3)^n}{6}&\frac{(-3)^n-3^n}{3}&\frac{(-3)^n-3^n}{6}\\\frac{(-3)^n-3^n}{3}&\frac{(-3)^n+2.3^n}{3}&\frac{(-3)^n-3^n}{3}\\\frac{(3)^n-(-3)^n}{6}&\frac{(-3)^n-3^n}{3}&\frac{5(-3)^n+3^n}{6}\end{pmatrix}$

Correction 8 On remarque que 0 et 2 sont racines du polynôme donc $X(X-2)$ divise bien ce polynôme.

Correction 9 On sait que le reste est de degré au plus 1, il s'écrit $aX+b$ avec a et b réels. On a donc :

$$(X\sin\theta+\cos\theta)^n=(X^2+1)Q(X)+aX+b$$

En évaluant pour $X=i$, on obtient $ai+b=(i\sin\theta+\cos\theta)^n=e^{in\theta}$ donc, en identifiant les parties réelles et imaginaires, $a=\sin(n\theta)$ et $b=\cos(n\theta)$.

Correction 10 1. On a $X^(X^{qd}-1)+X^r-1 = X^{r+qd}-X^r+X^r-1 = X^n-1$. On écrit :

$$\begin{aligned} X^{qd}-1 &= (X^d)^q - 1^q \\ &= (X^d-1)\sum_{k=0}^{q-1}(X^d)^k 1^{q-1-k} \\ &= (X^d-1)\sum_{k=0}^{q-1} X^{dk} \end{aligned}.$$

Ainsi,

$$X^n - 1 = (X^d-1)\left(X^r\sum_{k=0}^{q-1}X^{dk}\right) + X^r - 1,$$

avec $\deg(X^r-1) < d$ donc, par unicité de la division euclidienne, le quotient vaut $X^r\sum_{k=0}^{q-1}X^{dk}$ et le reste vaut X^r-1.

2. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} X^d-1 \text{ divise } X^n-1 &\Leftrightarrow \text{le reste de la division euclidienne est nul} \\ &\Leftrightarrow X^r-1=0 \\ &\Leftrightarrow r=0 \\ &\Leftrightarrow n=qd \end{aligned},$$
$$\Leftrightarrow d \text{ divise } n$$

d'où l'équivalence souhaitée.

Correction 11 On remarque tout d'abord que $Q=0 \Leftrightarrow P=0$ par intégrité de $\mathbb{C}[X]$.
On suppose par l'absurde que les polynômes P et Q ne sont pas nuls. En évaluant en $X=1$, on obtient $P^2(1)=0$ donc 1 est racine de P. Cela implique que $(X-1)$ divise P. On peut donc trouver $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P=(X-1)P_1$ d'où

$$P^2 = (X-1)^2P_1^2 = (X-1)Q^2(X),$$

ce qui implique

$$(X-1)P_1^2 = Q^2(X),$$

puis $Q(1)=0$. Notons a la multiplicité de 1 en tant que racine de P et b la multiplicité de 1 en tant que racine de Q. Il existe alors A et B tel que

$$P=(X-1)^aA \text{ et } Q=(X-1)^bB.$$

On remplace dans l'égalité, on obtient :

$$(X-1)^{2a}A^2 = (X-1)(X-1)^{2b}B^2,$$

soit encore

$$(X-1)^{2a}A^2 = (X-1)^{2b+1}B^2(X),$$

avec $A(1)\neq 0$ et $B(1)\neq 0$. La multiplicité de 1 en tant que racine de $(X-1)^{2a}A^2$ est $2a$, sa multiplicité en tant que racine de $(X-1)^{2b+1}B^2(X)$ est $2b+1$ donc $2a=2b+1$ ce qui est impossible.

On peut également et c'est bien plus rapide, regarder leurs degrés (en les supposant, par l'absurde, non nuls). On a alors $2\deg(P) = 2\deg(Q)+1$ ce qui est absurde donc les deux polynômes sont nuls.

Correction 12 On ordonne les racines de P: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ où $n = degP$ et on applique ensuite le théorème de Rolle entre chaque racine. On trouve que :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \exists b_i \in]a_i, a_{i+1}[, P'(b_i) = 0.$$

Comme on a $b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1}$, on a $n-1$ racines distinctes de P' qui est un polynôme de degré $n-1$ donc il est scindé à racines simples.

Soit a une racine de P^2+1. On a $P^2(a)+1=0$ donc nécessairement $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Si a est une racine d'ordre au moins 2, elle est également racine du polynôme dérivé. On a donc $P(a)P'(a)=0$ ce qui signifie que a est racine de P ou de P' or on a montré que ces deux polynômes avaient toutes leurs racines dans $\mathbb{R}$, a ne peut donc pas être racine de P ou de P', elle est donc racine simple du polynôme P^2+1.

Correction 13 On pose $Z=X^3$. Les racines de Z^2+Z+1 sont $e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$, les racines de X^6+X^3+1 sont $e^{\pm\frac{2i\pi}{9}+\frac{2ik\pi}{3}}$ pour $k\in[\![0,2]\!]$. On a $e^{\pm\frac{2i\pi}{9}+\frac{2ik\pi}{3}} = e^{\frac{2i(3k\pm1)\pi}{9}}$ et le polynôme est unitaire donc :

$$X^6+X^3+1 = \prod_{k=0}^{2}\left(X - e^{\frac{2i(3k+1)}{9}}\right)\left(X - e^{\frac{2i(3k-1)}{9}}\right).$$

Explicitons ces racines :

$$e^{\frac{ir\pi}{9}}, r\in\{-2,2,4,8,10,14\}.$$

Il faut maintenant déterminer lesquelles sont conjuguées. On a $e^{-\frac{4i\pi}{9}} = e^{\frac{14i\pi}{9}}$ et $e^{-\frac{8i\pi}{9}} = e^{\frac{10i\pi}{9}}$ donc les racines de X^6+X^3+1 sont $e^{\pm\frac{2i\pi}{9}}, e^{\pm\frac{4i\pi}{9}}$ et $e^{\pm\frac{8i\pi}{9}}$ ce qui permet d'écrire la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$:

$$X^6+X^3+1 = \prod_{k=1}^{3}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2^k i\pi}{9}\right)X + 1\right).$$

Correction 14 On montre facilement que i est racine. Comme P est à coefficients réels, on sait que $-i$ est aussi racine de P donc P est divisible par X^2+1:

$$X^4-2X^3+6X^2-2X+5 = (X^2+1)(X^2-2X+5)$$

Il reste à déterminer les racines du polynôme X^2-2X+5 qui sont $1+2i$ et $1-2i$. On a donc la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4-X^3+6X^2+2X-5=(X-i)(X+i)(X-1-2i)(X-1+2i)$$

et celle sur $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4-X^3+6X^2+2X-5=(X^2+1)(X^2-2X+5)$$

Correction 15 On écrit

$$\begin{aligned}(X^2+1)^2+(X^2-X-1)^2 &= (X^2+1)^2-\left(iX^2-iX-i\right)^2\\ &= \left(X^2+1-iX^2+iX+i\right)\left(X^2+1+iX^2-iX-i\right)\\ &= \left((1-i)X^2+iX+(i+1)\right)\left((1+i)X^2-iX+(-i+1)\right)\end{aligned}$$

Déterminons les racines de $\left((1-i)X^2+iX+(i+1)\right)$; leurs conjugués seront racines de $\left((1+i)X^2-iX+(-i+1)\right)$. Pour cela, on calcule de discriminant $\Delta=-9$, les racines sont donc $(1-i)$ et $\dfrac{-1+i}{2}$. On en déduit que les racines de P sont :

$$(1-i),(1+i),\frac{-1+i}{2},\frac{-1-i}{2}.$$

Enfin, on regroupe les racines conjuguées pour avoir la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$. On a $(X-(1+i))(X-(1-i))=X^2-2\Re(1+i)X+|1+i|^2=X^2-2X+2$ et $\left(X-\dfrac{-1+i}{2}\right)\left(X-\dfrac{-1-i}{2}\right)=X^2-2\Re\left(\dfrac{-1-i}{2}\right)X+\left|\dfrac{i-1}{2}\right|^2=X^2+X+\dfrac{1}{2}$ d'où, comme le polynôme a pour coefficient dominant 2 :

$$(X^2+1)^2+(X^2-X-1)^2=2\left(X^2-2X+2\right)\left(X^2+X+\frac{1}{2}\right)=\left(X^2-2X+2\right)\left(2X^2+2X+1\right).$$

Correction 16 On sait que les racines 7-ièmes de 3 sont les complexes de la forme :

$$\sqrt[7]{3}e^{\frac{2ik\pi}{7}},k\in[\![0,6]\!].$$

Une seule de ces racines est réelle, pour $k=0$. Les autres sont deux à deux conjuguées. Précisément, on a :

- $\sqrt[7]{3}e^{\frac{8i\pi}{7}}=\sqrt[7]{3}e^{-\frac{6i\pi}{7}}=\overline{\sqrt[7]{3}e^{\frac{6i\pi}{7}}}$,
- $\sqrt[7]{3}e^{\frac{10ik\pi}{7}}=\sqrt[7]{3}e^{\frac{-4i\pi}{7}}=\overline{\sqrt[7]{3}e^{\frac{4i\pi}{7}}}$,
- et $\sqrt[7]{3}e^{\frac{12i\pi}{7}}=\sqrt[7]{3}e^{-\frac{2i\pi}{7}}=\sqrt[7]{3}e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

La factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$P(X)=(X-\sqrt[7]{3})\prod_{k=1}^{3}\left(X^2-2\sqrt[7]{3}\cos\frac{2k\pi}{7}+\sqrt[7]{9}\right).$$

Correction 17 Le polynôme $P-Q$ admet une infinité de racines, il est donc nul.

Correction 18 On note $Q=P-X$ et f la fonction polynômiale associée à P.

On remarque que α est un point fixe de f si et seulement si α est une racine de Q. Or Q est de degré n, il admet donc au plus n racines distinctes.

On a montré que f admet au plus n points fixes.

Correction 19 Si P est nul, il satisfait l'équation. Sinon, notons n son degré. Le degré de $P(X^2)$ est $2n$, celui de $(X^2+1)P(X)$ est $n+2$, on doit donc avoir $2n=n+2$ ce qui impose$n=2$.

Pour $X=i$ dans l'égalité, on obtient $P(-1)=0$ donc -1 est racine de P.

Pour $X=-1$ dans l'égalité, on obtient $P(1)=0$ donc 1 est racine de P.

Comme on a montré que P est de degré 2, il est de la forme $\lambda(X^2-1)$. Réciproquement, tout polynôme de cette forme vérifie l'équation donc l'ensemble des solutions est

$$\{\lambda(X^2-1),\lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Correction 20

1. Soit z une racine de P, alors $P(z)=0$ et, par suite, $P(z^2)=P(z)P(z+1)=0$ donc z^2 est racine de P. Montrons par récurrence sur k que z^{2^k} est alors racine de P pour tout $k\in\mathbb{N}$. Nous venons de faire l'initialisation, supposons que c'est vrai au rang k, alors
$$P(z^{2^{k+1}})=P\left((z^{2^k})^2\right)=P(z^{2^k})P(z^{2k}-1)=0$$
donc $z^{2^{k+1}}$ est racine de P. On a montré, par récurrence sur k que : $\forall k\in\mathbb{N},z^{2^k}$ est racine de P.

2. Le polynôme P est non-nul, il admet donc un nombre fini de racines. Or, d'après la question précédente, on a vu que si z est racine, $\{z^{2^k},k\in\mathbb{N}\}$ est également inclus dans l'ensemble des racines de P. Cet ensemble doit donc être fini, il existe par conséquent $k\neq k'$ tel que $z^{2^k}=z^{2^{k'}}$. Quitte à permuter k et k', on peut supposer $k>k'$, on a donc $z^{2^{k-k'}}.z^{2^{k'}}=z^{2^{k'}}$ ce qui est équivalent à
$$\begin{cases} z^{2^{k'}}=0 \text{ ou}\\ z^{2^{k-k'}}=1\end{cases}$$
Dans le premier cas, $|z|=0$, dans le second, $|z|^{2^{k-k'}}=1$ donc $|z|=1$.

3. Soit z une racine de P, alors on a $P\left((z+1)^2\right)=P(z+1)P(z)=0$ donc $(z+1)^2$ est racine de P.

Nous allons montrer que les seules racines possible de P sont j et j^2 avec $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On sait que si z est racine de P, alors z est de module 0 ou 1 et, comme $(z+1)^2$ est racine de P, le module de $(z+1)^2$ (donc celui de $(z+1)$ doit être 0 ou 1.

- Si $z=0$ est racine de P, alors $(0+1)^2=1$ est racine de P donc $(1+1)^2=4$ est également racine de P or 4 n'est pas de module 0 ou 1, il ne peut donc être racine de P. Par conséquent, 0 ne peut être racine de P.
- Si z est racine de P et $|(z+1)^2|=0$, alors $z=-1$ est racine de P donc $(-1+1)^2=0$ aussi or on vient de montrer que 0 n'est pas racine de P.
- On sait désormais que si z est racine de P, alors nécessairement $|z|=1$ et $|(z+1)^2|=1$ soit $|z+1|=1$. Posons $z=x+iy$ avec x et y réels. Alors $x^2+y^2=1$ et $(x+1)^2+y^2=1$ ce qui impose $x=-\frac{1}{2}$ et par suite $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $z=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$.
  Les seules racines possibles de P sont donc j et j^2.
- Le polynôme P étant à coefficients réels, la multiplicité de j en tant que racine de P est la même que celle de j^2. Notons-la k, on a alors
$$P(X)=\lambda(X-j)^k(X-j^2)^k=\lambda(X^2+X+1)^k$$
  et comme P est unitaire, P est une puissance de X^2+X+1

Correction 21 1. Notons d le degré de P. Le polynôme P étant unitaire, le terme dominant de nP est nX^d, celui de $(X+1)P'$ est dX^d. On a donc $n=d$ et le terme dominant de P est X^n.

2. On écrit $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k$, alors $P'(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}$. On a donc
$$\begin{aligned}(X+1)P' &= nP \Leftrightarrow (X+1)\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}\\ &= n\sum_{k=0}^{n}a_kX^k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}ka_kX^k+\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}\\ &= n\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\end{aligned}$$
On fait un changement d'indice dans la deuxième somme du membre de gauche pour avoir des X^k (et non pas des X^{k-1}):
$$\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}=\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_{i+1}X^i=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k$$
d'où
$$(X+1)P'=nP\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}ka_kX^k+\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k=n\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$$
$$\Leftrightarrow (a_1-na_0)+\left(\sum_{k=1}^{n-1}(ka_k+(k+1)a_{k+1}-na_k)X^k\right)+(na_n-na_n)X^n=0$$
Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, on a donc
$$\begin{cases}a_1-na_0=0\\ ka_k+(k+1)a_{k+1}-na_k, \forall k=1..n-1\end{cases}$$

3. D'après la question précédente, pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, on a :
$$a_{k+1}=\frac{n-k}{k+1}a_k=\frac{(n-k)(n-k+1)}{(k+1)k}a_{k-1}$$
e,t par une récurrence immédiate,
$$\begin{aligned}a_{k+1} &= \frac{(n-k)(n-k+1)\dots(n-1)}{(k+1)k\dots1}a_1\\ &= \frac{(n-k)(n-k+1)\dots(n-1)n}{(k+1)k\dots1}a_0\\ &= \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}a_0\\ &= \binom{n}{k+1}a_0\end{aligned}$$
Ainsi, on a
$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_0X^k=a_0\,(X+1)^n$$

4. On remarque tout d'abord que, de manière générale, si a est racine d'ordre k d'un polynôme non-nul, alors a est racine d'ordre $k-1$ de P'. Cela découle immédiatement de la caractérisation avec les dérivées. En effet, si a est racine d'ordre k, alors $P^{(i)}(a)=0$, $\forall i<k$ et $P^{(k)}(a)\neq 0$. Comme $(P')^{(j)}=P^{(j+1)}$, on a $\forall i<k-1, (P')^{(i)}(a)=0$ et $(P')^{(k-1)}(a)=P^{(k)}(a)\neq 0$.

Supposons par l'absurde que P admette une racine a différente de -1 et notons k sa multiplicité. Alors $(X-a)^k$ divise P et $(X-a)^{k-1}$ divise P', il existe donc $Q(X)$ et $T(X)$ tel que $P(X)=(X-a)^kQ(X)$ et $P'(X)=(X-a)^{k-1}T(X)$ avec $Q(a)\neq 0$ et $T(a)\neq 0$. En injectant dans l'égalité vérifiée par P, on obtient
$$\begin{aligned}& (X-a)^kQ(X)=(X-a)^{k-1}(X+1)T(X)\\ \Leftrightarrow\;& (X-a)Q(X)=(X+1)T(X)\\ \Rightarrow\;& (a+1)T(a)=0\end{aligned}$$

ce qui est impossible. On a donc montré par l'absurde que l'unique racine de P est -1, ce qui assure que P s'écrit comme le produit d'une constante et du polynôme $(X+1)^n$.

Correction 22 1. On écrit

$$X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$$

et

$$X^2+1 = X^2+X-(X-1) = X(X+1)-(X-1),$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{X^2+1}{X(X-1)(X+1)} &= \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X(X+1)}\\ &= \frac{1}{X-1} - \frac{X+1-X}{X(X+1)}\\ &= \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X}\end{aligned}$$

On peut aussi, bien entendu, chercher $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}$ tel que

$$\frac{X^2+1}{X(X^2-1)} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1},$$

mettre au même dénominateur le membre de droite puis identifier les coefficients du numérateur.

2. On commence par écrire $X^3+2X^2-X-2 = (X-1)(X+1)(X+2)$. On cherche α,β,γ réels tels que

$$\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X+2} = \frac{3X^2+3}{(X-1)(X+1)(X+2)}.$$

Par substitution, on trouve $\alpha = 1$, $\beta = -3$ et $\gamma = 5$.

3. $\dfrac{X^2+1}{X^2+4} = 1 - \dfrac{3}{X^2+4}$.

Correction 23 1. On pose $u = \sin t$, on a $du = \cos t dt$ donc

$$\int^x \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t}\,\mathrm{d}t = \int^{\sin x} \frac{(1-u^2)+(1-u^2)^2}{u^2+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

On écrit

$$\begin{aligned}\frac{(1-u^2)+(1-u^2)^2}{u^2+u^4} &= \frac{2-3u^2+u^4}{u^2(u^2+1)}\\ &= \frac{u^4+u^2+2-4u^2}{u^2(u^2+1)}\\ &= 1+\frac{2-4u^2}{u^2(u^2+1)}\\ &= 1+\frac{2+2u^2-6u^2}{u^2(u^2+1)}\\ &= 1+\frac{1}{u^2}-\frac{6}{u^2+1}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int^{\sin x} \frac{(1-u^2)+(1-u^2)^2}{u^2+u^4}\,\mathrm{d}u &= \int^{\sin x} 1+\frac{1}{u^2}-\frac{6}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\\ &= \left[u-\frac{1}{u}-6\arctan(u)\right]^{\sin x}\\ &= \sin(x)-\frac{1}{\sin(x)}-6\arctan(\sin x)\end{aligned}$$

2. On pose $u = \cos t$, $du = -\sin t dt$ et

$$\int^x \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = \int^{\cos x} \frac{u^2-1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int^{\cos x} u-1\,\mathrm{d}u = \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x$$

Correction 24 On remarque que le terme dominant de $Q_n = (X^2+3X-5)^n$ est X^{2n}, le terme dominant de Q_n' est donc $2nX^{2n-1}$, celui de $Q_n^{(2)}$ est $2n(2n-1)X^{2n-2}$ et par une récurrence descendante, on obtient que le terme dominant de P_n est $2n(2n-1)\dots(n+1)X^n$ autrement dit $\frac{(2n)!}{n!}X^n$.

Correction 25 1. On pose la division euclidienne, on trouve $X^7-2X+1 = (X^5+X^3+X)(X^2-1)-X+1$.

2. On pose la division euclidienne, on trouve $3X^5+4X^2+1 = (X^2+2X+3)(3X^3-6X^2+3X+16)-41X-47$.

Correction 26 On sait que le reste de la division euclidienne de P par X^2-3X+2 est de degré au plus 1. Il existe donc $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$P(X) = Q(X)\left(X^2-3X+2\right)+aX+b.$$

Pour $X=1$, on obtient :

$$P(1) = a+b = 1.$$

Pour $X=2$, on obtient :
$$P(2)=2a+b=5.$$
On a donc $a=4$ et $b=-3$ donc le reste de la division euclidienne de P par X^2-3X+2 est $4X-3$.

De même, on sait que le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^2$ est de degré au plus 1. À nouveau, il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que :
$$P(X)=Q(X)(X+1)^2+aX+b.$$
En évaluant l'égalité pour $X=-1$, on obtient :
$$P(-1)=5=-a+b.$$
Deux polynômes égaux ont même dérivée formelle, on peut donc dériver l'égalité puis évaluer l'égalité obtenue en $X=-1$. On obtient :
$$P'(X)=Q'(X)(X+1)^2+2Q(X)(X+1)+a,$$
puis :
$$P'(-1)=0=a.$$
Le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^2$ est donc 5.

Correction 27 Par définition de la division euclidienne, on sait qu'il existe $(Q,R)\in\mathbb{R}[X]^2$ tel que
$$(X-1)^{2n}+(X-2)^n-2=Q(X)(X^2-3X+2)+R(X).$$
Comme $\deg(R)<2$, R est de la forme $aX+b$. On évalue la division euclidienne en $X=1$ et $X=2$, pour annuler X^2-3X+2, on trouve :
$$\begin{cases}(-1)^n-2 &= a+b\\ 1-2 &= 2a+b\end{cases}$$
ce qui est équivalent à :
$$\begin{cases}a+b &= (-1)^n-2\\ 2a+b &= -1\end{cases}$$
On trouve $a=1-(-1)^n$ et $b=2(-1)^n-3$ donc le reste de la division euclidienne du polynôme $(X-1)^{2n}+(X-2)^n-2$ par X^2-3X+2 est $(1-(-1)^n)X+2(-1)^n-3$.

Correction 28 On écrit $(X-1)(X^3+X^2+X+1)=X^4-1$, les racines du polynôme X^3+X^2+X+1 sont donc 1 et $\pm i$. Soit α une de ces racines. On a $\alpha^4=1$, donc :
$$\begin{aligned}\alpha^{4a+3}+\alpha^{4b+2}+\alpha^{4c+1}+\alpha^{4d} &= \left(\alpha^4\right)^a\alpha^3+\left(\alpha^4\right)^b\alpha^2+\left(\alpha^4\right)^c\alpha+\left(\alpha^4\right)^d\\ &= \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1\\ &= 0.\end{aligned}$$
Les trois racines distinctes de X^3+X^2+X+1 sont racines du polynôme $X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}$ donc X^3+X^2+X+1 divise $X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}$.

Correction 29 Il suffit de montrer que j et j^2 sont racines de $(X+1)^{2017}-X^{2017}-1$. Comme le polynôme est à coefficients réels, il suffit de montrer que j est racine. On sait que $j+1=j^2$ et $2017\equiv 1[3]$ donc $2017=3q+1$. Ainsi, $(j+1)^{2017}=(-j^2)^{2017}=-j^{6q+2}=-j^2$ car $j^{6q}=\left(j^3\right)^{2q}=1$, par définition de j.

On a aussi $j^{2017}=j^{3q+1}=j^{3q}j=j$. On en déduit que
$$(j+1)^{2017}-j^{2017}-1=-j^2-j-1=0,$$
car on sait que $1+j+j^2=0$. Le polynôme $(X+1)^{2017}-X^{2017}-1$ admet j comme racine. Comme il est à coefficients réels, il admet également j^2. Il est donc divisible par X^2+X+1.

Correction 30 On a $P_n'=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{nX^{n-1}}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{X^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{X^k}{k!}$.

Si $P_n(a)=0=P_n'(a)$ alors $P_n(a)-P_n'(a)=0=\dfrac{a^n}{n!}$ donc $a=0$ or $P_n(a)=1$ donc 0 n'est pas racine de P_n.

On a montré que toute racine de P_n est simple.

Correction 31

Si P est une constante alors P' ne divise pas P sauf s'il est nul. On suppose P de degré au moins 1. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P'|P$. Alors, il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=QP'$. Comme $\deg(P')=\deg(P)-1$, on a $\deg(Q)=1$ donc $Q=(aX+b)$ avec $a\neq 0$. On pose $\alpha=-\dfrac{b}{a}$, alors α est racine de P donc P admet au moins une racine réelle.

Supposons que P admette plus d'une racine réelle. On peut alors trouver une racine β de P telle que P ne s'annule pas entre α et β. On applique le théorème de Rolle à P entre α et β, on trouve un réel γ strictement compris entre α et β tel que $P'(\gamma)=0$. Or $P(\gamma)=Q(\gamma)P'(\gamma)=0$ et on a supposé que P ne s'annulait pas entre α et γ. On obtient une contradiction. On a donc montré, par l'absurde, que P n'a qu'une racine réelle. P s'écrit alors de la forme $\lambda(aX+b)^n$ avec $n>0$. Il est clair qu'un tel polynôme est divisible par sa dérivée, l'ensemble cherché est donc
$$\{\gamma(X-\alpha)^n,(\gamma,\alpha)\in\mathbb{R}^2,n\in\mathbb{N}^\star\}$$

Correction 32 On suppose par l'absurde qu'il admet une racine multiple α. On a alors $\alpha^n+2\alpha+n-1=0$ et $n\alpha^{n-1}+2=0$. On en déduit que
$$\alpha(n\alpha^{n-1}+2)-(\alpha^n+2\alpha+n-1)=0,$$
ce qui implique $(n-1)\alpha^n=n-1$. Ceci n'est possible que si α est de module 1. Or, l'égalité $n\alpha^{n-1}+2=0$ est impossible si α est de module 1 car $\dfrac{2}{n}\neq 1$. On a une contradiction donc le polynôme n'admet que des racines simples.

Correction 33 1. On a $P(1)=0$, on calcule les dérivées successives de P:

$$P_n'(X)=n(n+2)X^{n+1}-(n+2)(n+1)X^n+(n+2), P_n'(1)=0$$

$$P_n^{(2)}(X)=n(n+2)(n+1)X^n-n(n+1)(n+2)X^{n-1}, P_n^{(2)}(1)=0$$

$$P_n^{(3)}(X)=n^2(n+2)(n+1)X^{n-1}-n(n+1)(n+2)(n-1)X^{n-2} \text{ pour } n\neq 1, P_1^{(3)}(X)=n^2(n+1)(n+2)X^{n-1}, P_n^{(3)}(1)\neq 0$$

1 est donc racine de P_n de multiplicité 3.

2. D'après le travail fait à la question précédente, on sait que, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $(X-1)^3$ divise P_n.

   On a $P_1(X)=X^3-3X^2+3X-1$ et comme il est unitaire, on a $P_1(X)=(X-1)^3$.

   On a $P_2(X)=2X^4-4X^3+4X-2$ et P_2 est divisible par $(X-1)^3$. Comme son coefficient dominant vaut 2, on sait qu'il existe un réel b tel que $P_2(X)=2(X-1)^3(X+b)$. En identifiant les termes constants, on trouve $b=1$.

   Pour P_3, on fait la division euclidienne de P_3 par $(X-1)^3$, on trouve $P_3(X)=(X-1)^3(3X^2+4X+3)$. On remarque que le polynôme $3X^2+4X+3$ est de discriminant négatif donc il est irréductible sur $\mathbb{R}$. La factorisation sur $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P_3(X)=3(X-1)^3\left(X+\frac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)\left(X+\frac{2-i\sqrt{5}}{3}\right)$$

Correction 34 Il suffit de montrer que 1 est racine du polynôme de multiplicité au moins 3. Pour cela, on va calculer ses dérivées successives. On note P le polynôme

- $P(1)=0$.
- $P'(X)=n(n+2)X^{n+1}-(n+2)(n+1)X^n+(n+2)$ donc $P'(1)=0$.
- $P"(X)=n(n+2)(n+1)-(n+2)(n+1)n$ donc $P"(1)=0$.

Pas besoin de calculer $P^{(3)}$, on sait déjà que 1 est une racine de P de multiplicité au moins 3 donc $(X-1)^3$ divise P.

Correction 35 Il suffit de montrer que 1 est racine de $P(X)=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ de multiplicité au moins 2. On a $P(1)=0$ et $P'(x)=n(n+1)X^n-(n+1)nX^{n-1}$ admet également 1 pour racine donc $(X-1)^2$ divise P.

Correction 36 On note $P(X)=X^{2n+1}-(2n+1)X^{n+1}+(2n+1)X^n-1$. On a $P(1)=0$ donc 1 est racine de P.

On a $P(X)'=(2n+1)X^{2n}-(2n+1)(n+1)X^n+(2n+1)nX^{n-1}$ et $P'(1)=0$.

On a $P"(X)=(2n+1)2nX^{2n-1}-(2n+1)n(n+1)X^{n-1}+(2n+1)n(n-1)X^{n-2}$ et $P"(1)=0$.

Enfin, on a

$$P^{(3)}(X)=(2n+1)2n(2n-1)X^{2n-2}-(2n+1)n(n+1)(n-1)+(2n+1)n(n-1)(n-2)$$

et $P^{(3)}(1)=n(2n+1)(n+1)\neq 0$.

On a montré que 1 est racine de multiplicité 3 de P.

Correction 37 On a $P'(X)=4(X^3-7X-6)$. Il est clair que 1 est racine de P' donc :

$$P'(X)=4(X-1)(X^2+X-6).$$

Le polynôme X^2+X-6 admet 2 et -3 pour racines donc on a la factorisation suivante :

$$P'(X)=4(X-1)(X-2)(X+3).$$

On remarque que 2 est racine de P, on sait donc, vu que 2 est également racine de P', que $(X-2)^2$ divise P. On a :

$$P=(X-2)^2(X^2+4X-2).$$

Les racines de X^2+4X-2 sont $-2\pm\sqrt{6}$. On en déduit que :

$$P(X)=(X-2)^2(X+2+\sqrt{6})(X+2-\sqrt{6}).$$

Correction 38 On remarque que le polynôme est à coefficients réels donc, si i est racine, $-i$ l'est également. Le polynôme est donc divisible par X^2+1:

$$X^4+2X^3+4X^2+2X+3 = (X^2+1)(X^2+2X+3).$$

Le polynôme X^2+2X+3 est de discriminant négatif, il est donc irréductible sur $\mathbb{R}[X]$, on a trouvé la factorisation du polynôme en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction 39 On pose $T=X^2$. On résout :

$$5T^2+10T+1=0.$$

Le discriminant est égal à 80 donc les racines sont :

$$\frac{-10\pm 4\sqrt{5}}{10}=\frac{-5\pm 2\sqrt{5}}{5}.$$

On remarque que les deux racines sont négatives. On en déduit que les quatre racines du polynôme en X sont :

$$\pm i\sqrt{5 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

Correction 40 On remarque que $(X-1)P(X) = X^5 - 1$. Les racines de P sont donc les racines cinquièmes de l'unité différentes de 1. Autrement dit, les racines de P sont $e^{\frac{2ki\pi}{5}}$ pour k variant de 1 à 4.

Correction 41 On pose $T = X^3$. Le polynôme $T^2 - 2\cos(6\theta)T + 1$ est de la forme $T^2 - 2\Re\left(e^{6i\theta}\right)T + \left|e^{6i\theta}\right|^1$, ses racines sont donc $e^{\pm 6i\theta}$.

Les racines cubiques de $e^{\pm 6i\theta}$ sont $e^{\pm 2i\theta}, je^{\pm 2i\theta}$ et $j^2 e^{\pm 2i\theta}$. Le polynôme étant unitaire, on en déduit sa factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^6 - 2X^3\cos(6\theta) + 1 = \prod_{k=0}^{2}(X - j^k e^{2i\theta})(X - j^k e^{-2i\theta}).$$

Pour trouver la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$, il faut grouper les racines conjuguées deux à deux. Comme $j = \overline{j^2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, les racines sont $e^{2i\theta}, e^{2i\theta + \frac{2\pi}{3}}, e^{2i\theta + \frac{4i\pi}{3}}$ et leurs conjugués.

On peut donc affirmer que la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ est :

$$X^6 - 2X^3\cos(6\theta) + 1 = \prod_{k=0}^{2}(X^2 - 2\cos\left(2\theta + \frac{2k\pi}{3}\right)X + 1).$$

Correction 42 On a $P(y) = 0, \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc P admet une infinité de racines, il est donc nul.

Correction 43 On écrit $(X+1)^5 - X^5 - 1 = 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X = 5X(X+1)(X^2+X+1)$, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{5}{(X+1)^5 - X^5 - 1} &= \frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)} \\ &= \frac{X^2+X+1 - X(X+1)}{X(X+1)(X^2+X+1)} \\ &= \frac{1}{X(X+1)} - \frac{1}{X^2+X+1},\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{X+1-X}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$

On a donc

$$\frac{5}{(X+1)^5 - X^5 - 1} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X^2+X+1}.$$

Correction 44 On écrit $\displaystyle\int^x \frac{\cos t - \sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{\cos t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \int^x \frac{-\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

On a

$$\int^x \frac{-\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 t)\right]^x = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)$$

Dans la première intégrale, on pose $u = \sin t$, on a $du = \cos t dt$ donc

$$\int^x \frac{\cos t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int^{\sin x} \frac{1}{2-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On écrit

$$\frac{1}{2-X^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-X} + \frac{1}{\sqrt{2}+X}\right).$$

On a donc

$$\int^{\sin x} \frac{1}{2-u^2}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left(\sqrt{2}+u\right) - \ln\left(\sqrt{2}-u\right)\right]^{\sin x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right).$$

On a donc

$$\int^x \frac{\cos t - \sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right) + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)$$

Correction 45 Il est clair que si P existe, il ne peut être de degré strictement inférieur à n puisqu'on aurait alors $P^{(n)} = 0$.

On pose $Q(X) = P(X+1)$ et on note $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Par hypothèse, on a :

$$Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(1) = k.$$

D'après l'exercice **??**, on sait que $a_k = \dfrac{Q^{(k}(0)}{k!}$. On a donc

$$\forall k \in [\![0, n]\!], k! a_k = k,$$

d'où

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k = \frac{1}{(k-1)!}.$$

Ainsi, $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{(k-1)!}$ et $P(X) = Q(X-1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(X-1)^k}{(k-1)!}$.

Correction 46 On pose $Q(X)=P(X+a)$. On a alors $Q^{(n)}(0)=P^{(n)}(a)$. On peut donc raisonner avec le polynôme Q et montrer qu'il n'a pas de racines strictement positives. On pose $Q=\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$.

On a, $\forall k\in [\![0,m]\!]$, $Q^{(k)}(0)=k!a_k$ donc $a_k>0$. On suppose par l'absurde que $\alpha>0$ est une racine de Q. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k>0,$$

ce qui est une contradiction donc Q n'admet pas de racine strictement positive ce qui implique que P ne s'annule pas sur $[a,+\infty[$.

Correction 47 1. On écrit $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a $P\circ P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k(P(X))^k$ donc

$$P\circ P(X)-P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k(P(X))^k-\sum_{k=0}^{n} a_kX^k=\sum_{k=1}^{n} a_k\left(P(X)^k-X^k\right).$$

On a $P(X)-X|P(X)^k-X^k$ pour tout $k\geqslant 1$ donc $P(X)-X|P\circ P(X)-P(X)$. On écrit ensuite $P\circ P(X)-X=P\circ P(X)-P(X)+P(X)-X$. On en déduit que $P(X)-X|P\circ P(X)-X$

2. On écrit

$$\begin{array}{ll} & (x^2-3x+1)^2=3x^2-8x+2\\ \Leftrightarrow & (x^2-3x+1)^2-(3x^2-8x+2)=0\\ \Leftrightarrow & (x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1=x\\ \Leftrightarrow & P\circ P(x)=x\\ & \text{ avec } P(X)=X^2-3X+1\end{array}$$

On sait que $P(X)-X$ divise $P\circ P(X)-X$ d'après la question précédente donc, en factorisant $P\circ P(X)-X$ par $P(X)-X$:

$$\begin{array}{ll}\Leftrightarrow & \left(x^2-4x+1\right)\left(x^2-2x-1\right)=0\\ \Leftrightarrow & x=2\pm\sqrt{3} \text{ ou } x=1\pm\sqrt{2}\end{array}$$

On a trouvé quatre solutions distinctes.

Correction 48 Soit $\alpha\in\mathbb{C}$. On raisonne par équivalence :

$$P(\alpha)=0\Leftrightarrow(\alpha+i)^{2n+1}=(\alpha-i)^{2n+1}.$$

Comme i n'est pas racine de P, on sait que $\alpha\neq i$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} P(\alpha)=0 \quad & \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha+i}{\alpha-i}\right)^{2n+1}=1\\ & \Leftrightarrow \exists k\in[\![0,2n]\!],\ \frac{\alpha+i}{\alpha-i}=e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}\\ & \Leftrightarrow \exists k\in[\![0,2n]\!],\ (\alpha+i)=e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}(\alpha-i)\end{aligned}$$

$$\exists k\in[\![0,2n]\!],\alpha\left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1\right)=i\left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}+1\right)$$

On remarque que k ne peut être égal à 0, on peut donc diviser par $e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1$ et obtenir α:

$$P(\alpha)=0\Leftrightarrow\exists k\in[\![1,2n]\!],\alpha=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1}.$$

On peut simplifier l'expression des racines en utilisant la factorisation par l'arc moitié. Étant donné $k\in[\![1,2n]\!]$, on a

$$\frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1}=\frac{2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2ie^{\frac{ik\pi}{2n+1}}\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=-\frac{i\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=-i\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

On remarque que la somme recherchée est la somme des racines. On sait, d'après les relations coefficients racines, que c'est, à un multiple près, le coefficient devant X^{d-1} si d désigne le degré. Il nous faut donc déterminer ce dernier. Pour cela, on utilise la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$\begin{aligned}(X+i)^{2n+1}-(X-i)^{2n+1} &=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^{2n+1-k}i^k-\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^{2n+1-k}(-i)^k\\ &=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^{2n+1-k}\left(i^k-(-i)^k\right).\end{aligned}$$

Pour $k=0$, le terme est nul.
Pour $k=1$, on obtient $2i\binom{2n+1}{1}X^{2n}=2i(2n+1)X^{2n}$ donc le polynôme est de degré $2n$ (ce qui est cohérent avec les $2n$ racines trouvées précédemment).
Pour $k=2$, on obtient un terme nul ce qui montre que la somme recherchée est nulle :

$$\sum_{k=1}^{2n}\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=0.$$

Correction 49 Si A est toujours positif sur $\mathbb{R}$, cela signifie qu'il n'a aucune racine réelle de multiplicité impaire. Autrement dit, ses racines sont réelles de multiplicité paire ou complexes conjuguées. De plus, son terme dominant est nécessairement positif, sinon sa limite en $+\infty$ serait $-\infty$ et il serait négatif au delà d'un certain réel. On peut donc écrire le polynôme sous la forme

$$P(X) = \alpha^2 \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{2r_k} \prod_{j=1}^{m} (X-z_j)(X-\overline{z}_j),$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $r_k \in \mathbb{N}$ et $z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, les z_j n'étant pas nécessairement distincts.

Considérons le polynôme $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} (X-z_j)$. On peut l'écrire sous la forme $P_1(X) + iP_2(X)$ avec $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]$. On a alors $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} (X-\overline{z}_j) = P_1(X) - iP_2(X)$ et

$$\begin{aligned} P &= \alpha^2 \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{2r_k} \left(P_1(X) + iP_2(X)\right)\left(P_1(X) - iP_2(X)\right) \\ &= \alpha^2 \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{2r_k} \left(P_1^2(X) + P_2^2(X)\right) \\ &= \alpha^2 \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{2r_k} P_1^2(X) + \alpha^2 \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k) P_2^2(X) \\ &= \left(\alpha \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{r_k} P_1(X)\right)^2 + \left(\alpha \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{r_k} P_2(X)\right)^2 \end{aligned}$$

En posant $B = \alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{r_k} P_1(X)$ et $C = \alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{r_k} P_1(X)$, on a bien le résultat souhaité.

Correction 50 On suppose, par l'absurde, qu'un tel polynôme existe. On pose $Q(X) = P(X) - X$. Le polynôme Q admet tous les réels pour racines donc il est nul. On a donc $P(X) = X$ mais pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $P(z) = z \neq \overline{z}$ d'où une contradiction.

Correction 51 En évaluant en $X = 0$, on obtient $3P(0) = 0$ donc 0 est racine de P. En évaluant en $X = -1$, on obtient $2P(-1) = -P(0) = 0$ donc -1 est racine de P. En évaluant en $X = -2$, on obtient $P(-2) = -2P(-1) = 0$ donc -2 est racine de P.

On sait donc qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)Q(X)$. En remplaçant dans l'équation fonctionnelle, on obtient $Q(X) = Q(X+1)$. Un polynôme vérifiant ceci est nécessairement constant. En effet, s'il ne l'est pas, il admet une racine α d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. On a alors $\alpha+1$ racine de Q, puis $\alpha+2$ et, par une récurrence immédiate, $\alpha+n$ racine de Q pour tout entier n. Le polynôme Q possède alors une infinité de racines ce qui est absurde. Le polynôme Q est donc constant et P est de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, un polynôme de cette forme vérifie bien la relation donnée.

On peut aussi montrer que $0, -1$ et -2 sont les seules racines de P, s'il est non nul :
Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1, 0\}$ et α n'est pas un entier négatif inférieur ou égal à -3, alors

$$(\alpha+3)P(\alpha) = \alpha P(\alpha+1),$$

implique $\alpha+1$ racine de P (car $\alpha \neq 0$) puis

$$(\alpha+3+k)P(\alpha+k) = (\alpha+k)P(\alpha+k+1) = 0,$$

implique $P(\alpha+k+1) = 0$ car $\alpha+k+1 \neq 0$. On obtient donc une infinité de racines par récurrence sur k ce qui contredit P non nul.

On traite ensuite le cas où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \leqslant -3$, on écrit

$$(\alpha+2)P(\alpha-1) = (\alpha-1)P(\alpha) = 0,$$

ce qui implique, comme $\alpha+2 \leqslant -4$, que $P(\alpha-1) = 0$. On a ensuite

$$(\alpha-k+2)P(\alpha-k-1) = (\alpha-k-1)P(\alpha-k) = 0,$$

qui implique $P(\alpha-k-1) = 0$ puisque $\alpha-k-2 \neq 0$. Ainsi, si α est racine $\alpha-k$ est racine pour tout k et on obtient à nouveau une contradiction.

On en déduit que P n'a que trois racines, il s'écrit donc: $P(X) = \lambda X^\alpha (X+1)^\beta (X+2)^\gamma$. En injectant dans l'équation fonctionnelle, on obtient

$$(X+3)X^\alpha(X+1)^\beta(X+2)^\gamma = X(X+1)^\alpha(X+2)^\beta(X+3)^\gamma.$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, on a :

$$\begin{cases} 1 &= \gamma \\ \alpha &= 1 \\ \beta &= \alpha \\ \gamma &= \beta \end{cases}$$

On a donc $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donc $P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 52 Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle. On note $a_n x^n$ son terme dominant. Le coefficient dominant de P' est na_n, celui de P" est $n(n-1)a_n$. On a alors, en identifiant les coefficients dominants, $n^2(n-1)a_n^2 = 18a_n$ d'où $n = 3$. On pose $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et on identifie :

$$\begin{cases} 18a_3^2 &= 18a_3 \\ 18a_2a_3 &= 18a_2 \\ 4a_2^2 + 6a_1a_3 &= 18a_1 \\ 2a_2a_1 &= 18a_0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_1 = \dfrac{a_2^2}{3} \\ a_0 = \dfrac{a_2^3}{27} \end{cases}$$

Les polynômes vérifiant l'équation fonctionnelle sont donc les polynômes de la forme :

$$X^3 + \lambda X^2 + \frac{\lambda^2}{3}X + \frac{\lambda^3}{27},$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi que le polynôme nul.

Correction 53

Analyse :On suppose que P vérifie $P(X+1) - P(X) = X$. En dérivant deux fois l'égalité, on obtient $P"(X+1) = P"(X)$. Si $P"$ est non constant, il admet au moins une racine α. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\alpha + n$ est également racine $\forall n \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible, on a donc $P"$ constant. Le polynôme P est donc de degré au plus 2.

Synthèse :Soit $P = aX^2 + bX + c$ tel que $P(X+1) - P(X) = X$. On a alors

$$a(X+1)^2 + b(X+1) + c - \left(aX^2 + bX + c\right) = X,$$

c'est-à-dire

$$2aX + (a+b) = X.$$

Par unicité des coefficients, on a $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que les polynômes vérifiant $P(X+1) - P(X) = X$ sont les polynômes de la forme $\dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.

On peut aussi raisonner ainsi :

Analyse :Soit P tel que $P(X+1) - P(X) = X$ alors pour tout entier k, $P(k+1) - P(k) = k$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on somme pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(P(k+1) - P(k)\right) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On reconnaît une somme télescopique, on a donc

$$P(n) = P(0) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

On en déduit que le polynôme $P(X) - P(0) = \dfrac{X(X-1)}{2}$ a une infinité de racines (tous les entiers naturels) donc il est nul.

Synthèse :On suppose que P s'écrit $\dfrac{X(X-1)}{2} + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $P(X+1) - P(X) = \dfrac{X(X+1)}{2} - \dfrac{X(X-1)}{2} = X$. On en déduit que les polynômes vérifiant $P(X+1) - P(X) = X$ sont les polynômes de la forme $\dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.