

## Correction du DM5

*Pour rappel,  $f(x)$  n'est pas une fonction,  $f(x)'$  n'a aucun sens,  $\text{Im}(f(x))$ ,  $\text{Im}(I)$  etc non plus et écrire une fonction (sans  $x$  donc) égale à une expression avec des  $x$  signifie que vous n'êtes visiblement pas au clair sur la différence entre une fonction et un réel.*

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  par :  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

### Partie 1 : Étude de la bijection réciproque de $f$

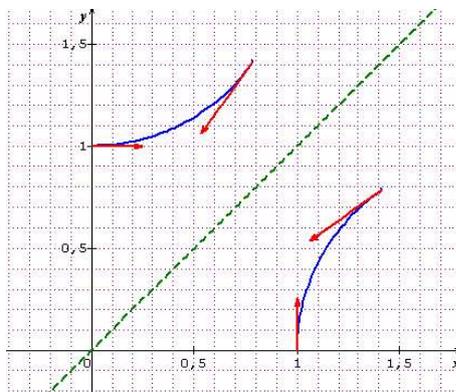
1. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  car  $\forall x \in [0, \pi/4]$ ,  $\cos x > 0$  et :

$$\forall x \in I, f'(x) = -\frac{\cos'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

La fonction dérivée  $f'$  est strictement positive sur  $]0, \pi/4]$  et ne s'annule qu'en 0 :  $f$  alors strictement croissante sur  $I$ . Par ailleurs,  $\text{Im}(f) = [f(0), f(\pi/4)] = [1, \sqrt{2}] = J$ . La fonction  $f$  réalise alors une bijection de  $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  vers  $J$ .

*"prend ses valeurs" ne donne qu'une inclusion, pas l'image. Certains ont souhaité expliciter  $f^{-1}$  avec arccos. Pourquoi pas mais il est alors impératif de justifier pourquoi, pour un  $x$  donné,  $\arccos \cos(x) = x$  car cette égalité n'est pas toujours vraie.*

2. On rappelle que la courbe de  $f^{-1}$  s'obtient à partir de celle de  $f$  par symétrie orthogonale par rapport à la droite  $D : y = x$ . La tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 (resp.  $\pi/4$ ) a pour coefficient directeur  $f'(0) = 0$  (tangente horizontale) (resp.  $f'(\pi/4) = \sqrt{2}$ ).



*Le calcul des dérivées doit apparaître pour justifier l'allure des tangentes. J'en profite pour vous rappeler que tangente s'écrit avec un seul A.*

3. Pour tout  $x \in J$  :  $x = f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))}$ , donc  $\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}$ .

$\forall x \in J$ ,  $f^{-1}(x) \in [0, \pi/4]$  donc  $\sin(f^{-1}(x)) \geq 0$  et :

$$\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{\sin^2(f^{-1}(x))} = \sqrt{1 - \cos^2(f^{-1}(x))} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

*On commence, bien sûr, par définir  $x$  avant de se lancer dans des égalités et pour info, sinus N'est PAS égal à  $\sqrt{1 - \cos^2}$ .*

4. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, \pi/4]$  et

$$\forall x \in [0, \pi/4], f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

On a  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , la fonction réciproque  $f^{-1}$  est donc dérivable sur  $f([0, \pi/4]) = ]1, \sqrt{2}] = J \setminus \{1\}$ .

*Dire que  $f' \circ f^{-1}$  s'annule en 1 ne suffit pas, il faut que cette fonction ne s'annule QU'en 1.*

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))} = \frac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = \frac{1}{x^2} \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Mais comme  $x$  est positif :  $\forall x \in J \setminus \{1\}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ .

Remarque :  $f'(0) = 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f^{-1})'(x) = +\infty$ , donc :  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en 1, et sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

*Il est impératif de préciser que  $x$  est positif pour le "rentrer" dans la racine carrée.*

5.  $f^{-1}$  est dérivable en  $\sqrt{2}$ , cette fonction possède donc un développement limité d'ordre 1 au voisinage de  $\sqrt{2}$  qui est :

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + (f^{-1})'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + o(x - \sqrt{2}).$$

Avec  $f^{-1}(\sqrt{2}) = \pi/4$ ,  $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on obtient alors au voisinage de

$\sqrt{2}$  :

$$f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) + o_{\sqrt{2}}(x - \sqrt{2}).$$

*Il ne faut surtout pas développer ! un DL1 en  $x_0$  est de la forme  $a + b(x - x_0) + o(x - x_0)$ .*

## Partie 2 : Étude des dérivées successives de $f$

1. La fonction  $\cos$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et ne s'annule pas sur  $I$ , donc par inverse,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

2. Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que :

$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

★ Pour  $n = 0$  :  $\forall x \in I, f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{\cos^{0+1}(x)}$ , la propriété est vraie en posant  $P_0 = 1$ .

★ Supposons la propriété vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in I : f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= \frac{\cos x \cdot P_n'(\sin x) \cos^{n+1}(x) - P_n(\sin x) \cdot (n+1)(-\sin x) \cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)} \cdot [\cos^2(x)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)]$$

$$= \frac{1}{\cos^{n+2}(x)} \cdot [(1 - \sin^2(x))P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)].$$

En posant alors  $P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)XP_n$ , on a bien :

$$\forall x \in I, f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{n+1+1}(x)}. \text{ La propriété est donc héréditaire, ce qui achève la récurrence.}$$

Le point central de la récurrence repose, comme souvent, sur l'hérédité. La propriété est "il existe un polynôme tel que", vous devez donc montrer qu'il existe un **polynôme** tel que... ce que vous avez bien souvent bâclé. (Un polynôme est de la forme  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ , il n'y a pas de  $\sin(x)$  dans son expression!!)

$$3. \forall x \in I : f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2(x)} = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^{1+1}(x)} \text{ avec } P_1 = X.$$

$$\begin{aligned} \forall x \in I : f''(x) &= \frac{1}{\cos^4(x)} [\cos x \cos^2(x) - (\sin x) \cdot 2(-\sin x) \cos x] \\ &= \frac{(1 - \sin^2(x)) + 2 \sin^2 x}{\cos^3(x)}. \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } \forall x \in I, f''(x) = \frac{P_2(\sin x)}{\cos^{2+1}(x)} \text{ avec } P_2 = X^2 + 1.$$

4. Supposons qu'il existe un autre polynôme  $Q_n$  tel que :  $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$  : alors

$\forall x \in I, P_n(\sin x) = Q_n(\sin x) \iff \forall x \in I, (P_n - Q_n)(\sin x) = 0$ . Par bijectivité de la fonction  $\sin$  de  $I$  dans  $[0, \sqrt{2}/2]$ , on obtient alors :  $\forall y \in [0, \sqrt{2}/2], (P_n - Q_n)(y) = 0$  : le polynôme  $P_n - Q_n$  possède une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Le polynôme  $P_n$  tel que :

$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$  est donc unique! Évidemment, vous n'êtes pas (encore) capables de faire ce genre de raisonnement, ici je n'attendais donc pas l'unicité de  $P_{n+1}$ .

D'après la question 2 (et la remarque précédente), on peut affirmer que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n.}$$

En effet  $P_{n+1}$  défini ainsi est bien le seul polynôme qui convient!

$$\text{En particulier, avec } n = 2 : P_3 = (1 - X^2)P'_2 + 3XP_2 = (1 - X^2)(2X) + 3X(1 + X^2) = \boxed{X^3 + 5X}.$$

*Là encore,  $P_3$  ne doit pas avoir de  $\sin(x)$ .*

5. Montrons par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le terme dominant de  $P_n$  est  $X^n$  (ce qui donne à la fois son degré et son coefficient dominant!)

★ La propriété est vraie pour  $n = 0, 1, 2, 3$ .

★ Supposons la propriété vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$  :

le terme dominant de  $XP_n$  est alors  $X^{n+1}$ , celui de  $(X^2 - 1)P'_n$  est  $nX^{n+1}$ . Le coefficient devant  $X^{n+1}$  dans  $P_{n+1}$  est alors  $(n+1) \cdot 1 - n = 1$ , ainsi le terme de plus haut degré de  $P_{n+1}$  est  $X^{n+1}$ , ce qui achève la récurrence :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n$  est de degré  $n$ , son coefficient dominant étant 1.

*On pouvait aussi poser  $P_n = X^n + Q_n$  avec  $\deg(Q_n) \leq n+1$ . Attention à ne pas écrire des égalités qui n'ont aucun sens  $P_{n+1} \neq (n+1)X^{n+1} - nX^{n+1}$  et écrire  $P_n = X^n + A$  et chercher à écrire  $P_{n+1}$  sous la forme  $X^{n+1} + A$  va clairement vous emmener à écrire n'importe quoi ! Certains ont raisonné avec le degré puis le coefficient dominant. C'est problématique car, sans l'étude du coefficient en  $X^{n+1}$ , vous ne pouvez affirmer que le polynôme est effectivement de degré  $n+1$ . En effet, la somme de deux polynômes de degré  $n+1$  est de degré **au plus**  $n+1$  (car les termes en  $X^{n+1}$  peuvent s'annuler). Pour affirmer qu'il est de degré  $n+1$ , il faut calculer le coefficient du terme en  $n+1$  et montrer qu'il est non nul.*